Stat.fiz. feladatok. **2. hét.** **Beadási határidő: Február 26, 10:15.**

(1)

A Földről küldött radarjelek visszaverődnek a Vénuszról. Tegyük fel, hogy egy ilyen radarkísérletben τ időtartamú elektromágneses impulzusokat küldünk a Vénusz felé. A földi mérőműszert $t = 2\ell_{F-V}/c$ idő múlva kapcsoljuk be τ időtartamra (ℓ_{F-V} a Föld-Vénusz távolság, s c a fénysebesség), s regisztráljuk a jelet. A visszhang amplitúdója a_s várhatóan kicsi lesz a háttérzaj amplitúdójához (a_n) képest (ami az űrben és az atmoszférában jelenlevő elektromágneses fluktuációktól plusz a mérőműszer áramfluktuációiból adódik össze).

A mérőműszer tehát $a = a_s + a_n$ amplitúdójú jelet regisztrál. Bár $\langle a_n \rangle = 0$ (a_n ugyanolyan valószínűséggel negatív vagy pozitív), a_n fluktuációi nagyok, azaz $\sqrt{\langle a_n^2 \rangle}$ lényegesen nagyobb lehet, mint a_s értéke. Tegyük fel például, hogy $\sqrt{\langle a_n^2 \rangle} \approx 1000 a_s$. Ilyen körülmények között a visszhang eltűnik a háttérzajban.

A kísérletet azonban úgy is tervezhetjük, hogy egymás után N darab, τ időtartamú jelet küldünk, majd a visszaérkezési időpontokban regisztrált jeleket összeadjuk. Az eredményül kapott amplitúdó $A = A_s + A_n$ alakú lesz, ahol A_n a zajamplitúdók, A_s pedig a jelamplitúdók összege. Hány jelet kell kiküldenünk ahhoz, hogy a visszhang kimutatható legyen, azaz teljesüljön a $\sqrt{\langle A_n^2 \rangle} \approx A_s$ egyenlőség?

(2)

i) Határozzuk meg a $T = 300^0 K$-os, CO molekulákból álló gázban a sebesség abszolút értékének átlagát, valamint a legvalószínűbb értékét!

ii) Számítsuk ki egy molekula kinetikus energiájának átlagát és relatív fluktuációját! Nem kellene a relatív fluktuációnak kicsinek lennie?

(3)

Írjuk fel a Maxwell-Boltzmann eloszlást R sugarú gömb gravitációs terében levő ideális gázra! Használhatjuk-e ebben az esetben ezt az eloszlást? Miért nem szökik el a Föld atmoszférája?

(4)

Leejtünk egy M tömegű gyémántot, ami N darabra törik szét. Várhatóan mekkora lesz a gyémántdarabok összértéke, ha egy gyémántdarab értéke tömegének négyzetével arányos, s bármilyen N darabra törés egyenlően valószínű? Magyarázzuk meg a probléma kapcsolatát a mikrokanonikus eloszlással!

(5)

Vizsgáljunk egy egydimenziós klasszikus oszcillátort, s határozzuk meg a fázistér E-nél kisebb energiájú tartományának térfogatát, $\Omega(E)$-t! Hasonlítsuk össze az eredményt a megfelelő kvantumoszcillátor olyan állapotainak a számával $[\Omega_q(E)]$, amelyekben az energia kisebb, mint E. Mutassuk meg, hogy nagy energiákra (klasszikus limit) $\Omega_q(E) \approx \Omega(E)/h$!

Ismételjük meg a számolást N független, klasszikus, illetve kvantumoszcillátorból álló rendszerre!

Megjegyzés: N független, kvantumoszcillátor energiája a következőképpen írható:

$$E_{n_1,n_2,\ldots,n_N} = (n_1 + n_2 + \ldots + n_N)\hbar\omega + \frac{1}{2}N\hbar\omega \tag{1}$$

ahol $n_i = 0, 1, \ldots$.

(6) Nem kötelező, bármikor beadható az év folyamán. Azoknak írtam ki, akik érdeklődnek a köz által vitatott kérdések iránt (de azért az évvégi jóindulatú kerekítéseknél esetleg figyelembe veszem a megoldását).

A Föld átlagos hőmérsékletében megfigyelhető 100 éves melegedési trendet a mérések $a = 0.7^0C/100$év-nek adják. Ezt az értéket úgy számítják, hogy a megfigyelt évi átlagértékekhez ($T_i, \quad i = 1, 2, ..., N = 100$) lineáris függvényt fittelnek

$$T_i = a\frac{i}{N} + b \quad , \tag{2}$$

s a adja a trend N évre vonatkoztatott értékét.

A fittelés a legkisebb négyzetes eltérést keresve történik, azaz a és b paramétereket a

$$\sum_{i=1}^{N}[T_i - (a\frac{i}{N} + b)]^2 \tag{3}$$

kifejezést minimalizálásal számítják.

A melegedéssel kapcsolatos vita részben azzal kapcsolatos, hogy a megfigyelt a érték statisztikus fluktuáció-e. A problémát nulladik közelítésben a következőképpen tárgyalhatjuk. Tegyük fel, hogy

1. Nincs trend, s az évi átlaghőmérsékletek egy $\bar{T}$ átlag körül ingadoznak.
2. Legyenek az éves ingadozások függetlenek egymástól.
3. Legyen az éves ingadozások eloszlásfüggvénye Gauss függvény, σ szórással.
4. Legyen $\sigma \approx 0.5^0C$. Ezt az értéket a következő becslésből kaphatjuk: A napi hőmérsékletfluktuációkat $\delta T \approx 5 - 10^0C$-nak tekinthetjük, s mivel az évi átlaghőmérséklet 365 napi átlagból adódik össze, ezért $\sigma \approx (5 - 10)^0C/\sqrt{365} \approx 0.5^0C$.

Világos, hogy ha a fentiekből kiindulva az $a > 0.7^0C/100$év-et kapnánk, akkor nincs értelme melegedési trendről beszélni. Az is világos, hogy a fenti problémában a átlaga $\bar{a} = 0$. Tehát a alatt a $\sqrt{\overline{a^2}}$ mennyiséget kell értenünk.

A kérdés: Mekkora $\sqrt{\overline{a^2}}$, ha $N = 100$, s mekkora, ha $N = 10$?