**(1)** Viriál sorfejtés.

Tekintsünk egy $T$ hőmérsékleten levő klasszikus gázt, amelynek molekulái között a kölcsönhatás a következő alakú:

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } r \le a; \\ -u_0, & \text{ha } a < r < b; \\ 0, & \text{ha } r \ge b. \end{cases} \qquad (1)$$

Írjuk fel a gáz állapotegyenletét kis sűrűségek esetén!

**(2)** Fajhő Landau sorfejtésből.

Vizsgáljunk egy rendszert, amelynek szabadenergiája (standard Landau sorfejtés)

$$F = F_0 + \frac{a_0}{2}(T - T_c)m^2 + \frac{b}{4}m^4 \quad , \qquad (2)$$

ahol $m$ a rendparaméter (mint pl. a mágnesezettség egy ferromágnesben), $a_0 > 0$, $b > 0$ és $F_0(T)$ sima függvénye $T$-nek. Határozzuk meg a fajhő viselkedését a kritikus pont ($T_c$) körül!

Ne feljtsük el, hogy $T > T_c$-re $m = 0$, míg $T < T_c$-re $m$ függ a $T$-től.

**(3)**

A molekuláris tér közelítés nem veszi figyelembe azt, hogy a paramágneses fázisban is van rövidtávú rendezettség [Mivel az átlagos mágnesezettség nulla ($m = 0$), ezért ebben a közelítésben nincs kölcsönhatás a spinek között: $s_i s_j \to -m^2 + s_i m + s_j m = 0$]. A rövidtávú korrelációk figyelembevételének egyik változata az, hogy a rácsot azonos klaszterekre osztjuk (például a négyzetrácsot négy szomszédos spinből álló klaszterek négyzetrácsára), s a klasztereken belüli kölcsönhatásokat egzaktul kezeljük, a klaszterek közötti kölcsönhatásokat pedig átlagtérrel vesszük figyelembe. Adjuk meg a mágnesezettséget meghatározó egyenletet, határozzuk meg a kritikus hőmérsékletet, s hasonlítsuk össze az eredményt az egyszerű átlagtér elméletből kapottakkal, s a kétdimenziós Ising modellre ismert egzakt eredménnyel (négyzetrácsra: $J/k_B T_c = 0.441...$) is!

**(4-5)** Kvázirészecskék.

Az előadáson szó volt arról, hogy a Heisenberg ferromágnesek alacsonyhőmérsékleti gerjesztései magnonok, amelyeknek energiája a hullámszám függvényében $\varepsilon(\vec{k}) = Dk^2$ alakban írható.

(i) Alacsony hőmérsékleten a magnonok száma (sűrűségük) kicsi, s a kvázirészecskék jó közelítéssel nem hatnak kölcsön. Határozzuk meg a magnonoknak a rendszer fajhőjébe adott járulékát!

(ii) Mutassuk meg, hogy $d = 1$ és 2 dimenziós rendszer esetén a magnonok sűrűsége divergál tetszőlegesen kis hőmérsékleten! Mit jelent ez? Mi volt a magnonkép kiinduló feltételezése?

(iii) Külső mágneses tér bekapcsolása megváltoztatja a magnonok energiáját: $\varepsilon(\vec{k}) = Dk^2 \to \varepsilon(\vec{k}) = \Delta + Dk^2$, ahol $\Delta$ a mágneses térrel arányos paraméter. Hogyan változik a magnonoknak a rendszer fajhőjébe adott járuléka a külső mágneses tér bekapcsolásakor?

---

**Nem kötelező, de a 9. hét 3 feladatára kapott pontszámot meg lehet emelni az alábbi feladatok megoldásával.**

**(Extra 1)** Ultrarelativisztikus Fermi gáz.

Tegyük fel, hogy a $T = 0$ hőmérsékletű elektrongáz leírható ideális Fermi gázként. Becsüljük meg, hogy milyen sűrűségek mellett lesznek jelentősek a relativisztikus korrekciók, azaz számítsuk ki azt a sűrűséget, amely mellett a Fermi sebesség a fénysebesség véges hányada (pl. $v_F \approx c/10$).

Ultrarelativisztikus határesetben az elektron energiája a következőképpen írható:

$$\varepsilon = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \approx cp \quad , \qquad (3)$$

ahol $m$ az elektron tömege, $c$ a fénysebesség, $p$ pedig az elektron impulzusa. Mutassuk meg, hogy az ultrarelativisztikus határesetben a nyomás ($p$, ne keverjük az impulzussal) és az energia ($E$) között a következő összefüggés áll fenn:

$$pV = \frac{1}{3}E \quad , \qquad (4)$$

ahol $V$ a rendszer térfogata.

**(Extra 2)** Csillagok stabilitása.

A csillagok gravitációs összeomlással szembeni stabilitásának egyszerű magyarázata a következő. A csillagot alkotó elektronok, protonok, neutronok, meg a különböző magok nemkölcsönható degenerált Fermi gázként viselkednek a Napban található jellegzetes sűrűségek és hőmérsékletek mellett. A Fermi energia arányos a (sűrűség)$^{2/3}$-nal, azaz a teljes kinetikus energia

$$E_{kin} \sim M^{5/3}/R^2 \quad , \qquad (5)$$

ahol $M$ a csillag tömege, $R$ pedig a sugara. Másrészt a gravitációs potenciális energiát a következőképpen írhatjuk

$$E_{pot} \sim -M^2/R \quad , \qquad (6)$$

s a két energia összehasonlításából látható, hogy a gravitációs összeomlást megakadályozza az, hogy

$E_{kin}$ gyorsabban nő $-E_{pot}$-nál az $R \to 0$ határesetben.

Emlékeznünk kell azonban arra, hogy a relativisztikus effektusok lényegessé válnak nagy sűrűségeknél (lásd az előző példát). Tegyük fel, hogy a csillag sűrűsége elég nagy ahhoz, hogy a rendszert ultrarelativisztikus Fermi gáznak tekintsük. Számítsuk ki a csillag kinetikus energiáját erre az esetre, s ismételjük meg a fenti argumentumot. Eredményül azt kapjuk, hogy a csillag csak akkor stabil a gravitációs összeomlással szemben, ha $M < M_c$. Határozzuk meg $M_c$-t és hasonlítsuk össze a Nap tömegével!