

Véletlen fizikai folyamatok

Teams: Crs 24-25-2 velfolyf19ea 1

Rácz Zoltán

Elm. Fiz. Tansz., 6.79B sz.

Tel.: +36 1 372 2516

Email: racz@general.elte.hu

Honlap: cgl.elte.hu/~racz

Skype: [raczzoltanattila](#)

Általános információk

Előadás ideje: Csütörtök 8:15 – 9:45

Előadás helye: A ép. 2.106 sz.

Honlap: <http://cgl.elte.hu/~racz/Stochastic-processes.html>

Konzultáció: E-mail-en történt megbeszélés után Skype-on vagy Teams-ben.

Házi feladatok kiadása: Hetente, Teams-en keresztül.

Házi feladatok beküldése: Teams-be a házi feladatban megjelölt időpontig
pdf file-ban Vezetéknév_Keresztnév_n.pdf névvel.

Vizsga: 50% házi feladat (vizsgához: minimum az elérhető össz-pontszám fele),
50% szóbeli (feladatmegoldást is tartalmaz).

● Barrikádok, etikai problémák, információátadás optimalizálása.

Véletlen fizikai folyamatok

(2024/2025)

Rác Zoltán

[ELTE](#) [Elméleti Fizika Tanszék](#)

1117 Budapest, Pázmány sétány 1/A

Telefon: ELTE: +36-1-372-2516

E-mail: [family-name \(racz\) "@ general.elte.hu](mailto:family-name (racz))

Skype név: raczzoltanattila

Előadás: Csütörtök, 8:15-9:45, A épület, 2.106-os terem, Jelenléti oktatás

Előadással kapcsolatos anyagok (2024/25)

[Tematika](#)

[An amusing lecture about randomness by Persi Diaconis \(Stanford Univesity\)](#)

[Jean Perrin: Brown-mozgás és molekuláris valóság](#)

Brown-mozgás: Einstein és Langevin elméletei (1-2: [Könyv](#) [Előadás](#))

Házi feladatok:

HF1: [Bolyongásproblémák 1](#) (60)

Értékelés:

A vizsgajegy a következőkből áll össze:

Házi feladatok 50% ([jelenlegi állás](#))

Szóbeli vizsga 50%.

[Vizsgatételek](#)

Ajánlott irodalom:

C. W. Gardiner, Handbook of Stochastic Methods (Springer-Verlag, New York, 2009)

Javaslatok, kérdések (akár névtelenül is):  Válaszok: 

Last updated: 2021. február 10.

- Véletlen jelenségek leírásának történeti aspektusai: statisztikus fizika, kvantum mechanika, stochasztikus dinamika.
- Einstein gondolatai a véletlen jelenségekről: a Brown mozgás makroszkopikus leírása (egyszerűen a Chapman-Kolmogorov egyenlettől a Fokker-Planck egyenletig).
- A Brown mozgás Langevin megközelítése (a stochasztikus differenciál egyenlet fogalma). Perrin kísérletei és analízisük.
- Véletlen folyamatok diszkrét állapottérben: Master egyenlet. Stacionárius állapotok és az egyensúlyhoz relaxálás. Részletes egyensúly és feltételek az átmeneti valószínűségekre.
- Szimulációs problémák diszkrét állapottérben. Egyensúlyhoz relaxálás a kinetikus Ising modellben spin-flip és spin-exchange dinamika esetén.
- Momentumok, kumulánsok, generátorfüggvények. Alkalmazások sorbanállás és születés-kihalás típusú problémákban. Átlagtér elmélet az alacsony momentumokra.
- Hálózatok (Erdős-Rényi, véletlen rekurzív, preferenciális) dinamikai jellemzése, fokszámlálásuk származtatása a Master egyenlet segítségével.
- Stochasztikus differenciál egyenlet túlszabályozott oszcillátorra: Langevin egyenlet és az egyensúlyi hőtartály zajának tulajdonságai.
- Langevin egyenlet Gauss zajjal: a Fokker-Planck egyenlet deriválása. Gauss zaj alkalmazása szimulációs problémákban.
- Fluktuációk, korrelációk és a teljesítményspektrum számolása a Langevin egyenletből. Feszültség- és áramfluktuációk áramkörökben.
- Fluktuációk egyensúlytól távol. Aktív Brown mozgás, avagy milyen távol van egy élőlény az egyensúlytól?

Véletlen fogalma, mérése és értelmezése



Érmefeldobás -- tisztán fizika

Gyakoriság?

$$P_{fej} = \frac{N_{fej}}{N} \rightarrow \frac{1}{2}?$$

Szimmetriák?

$$P_{fej} = \frac{1}{2}$$



$$P_5 = \frac{1}{6}$$



Figure 1.a

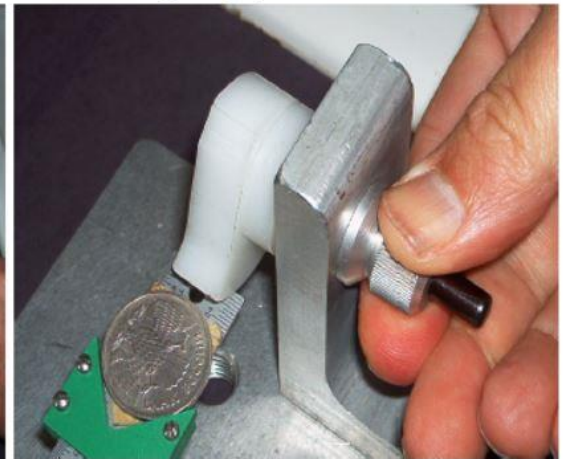
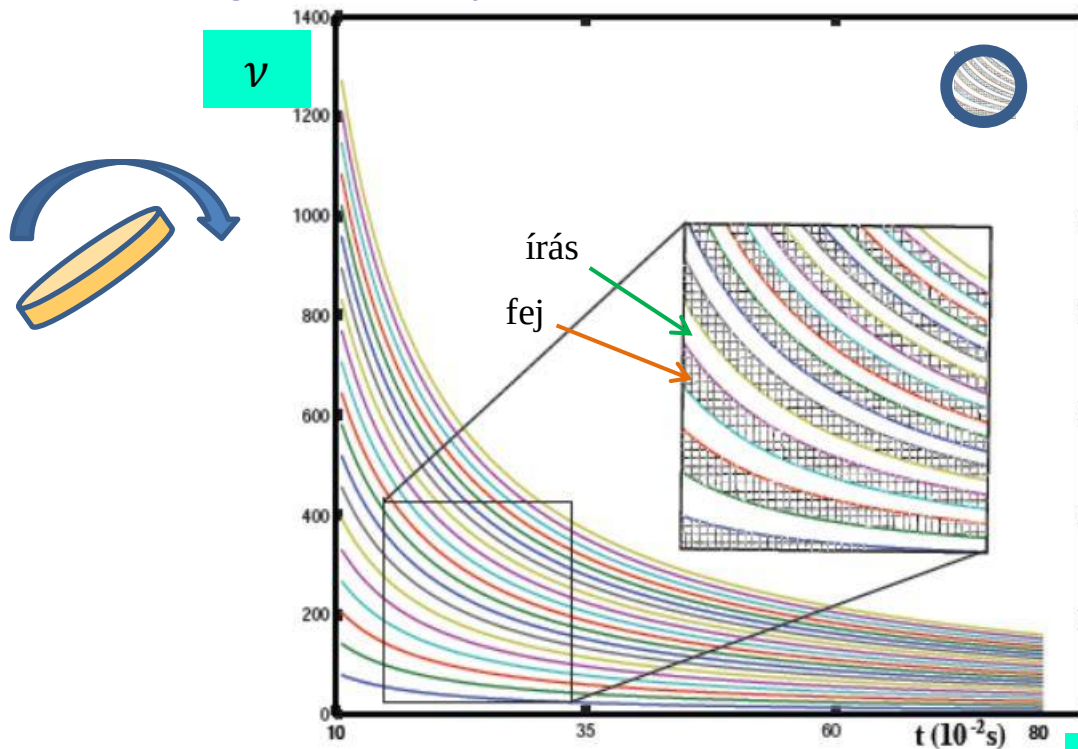


Figure 1.b



Érmefeldobás -- tisztán fizika

forgás frekvenciája



Kezdőfeltételek
határozatlansága
(kontrollálhatatlansága)



$$P_{fej} = \frac{1}{2}$$

Fordulatok száma a repülés során:

$$N = \frac{t}{1/\nu} = \underbrace{t\nu}_{\text{hiperbolák}} = \text{const}$$

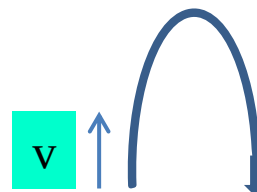
$$\Delta N = 1 = t \Delta \nu \quad (= \nu \Delta t)$$

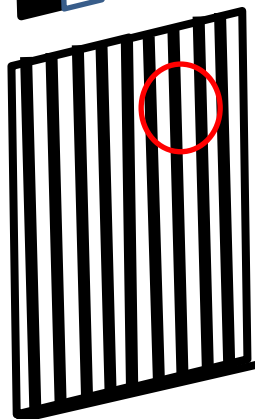
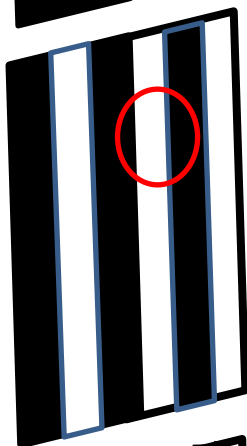
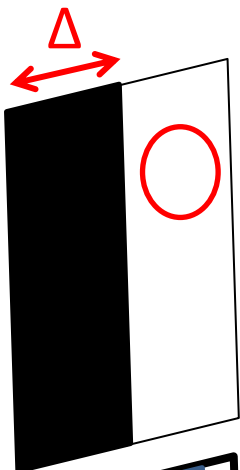
visszatérési idő

$$t \sim \nu$$

$$t = \frac{2\nu}{g}$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 + \nu t = 0$$





Valószínűség számolása

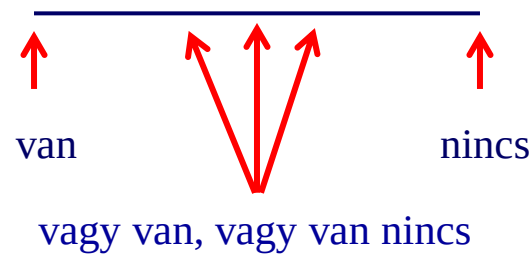
H. Poincare 1854-1912

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{fehér} = \frac{T_{fehér}}{T_{teljes}} = \frac{1}{2}$$

Függetlenül a  alakjától, vagy a körön belüli találati eloszlástól.

Valószínűség számolása (Feynman): Kétségek kvantifikálása

Van Isten?



Esni fog az eső?



Meteorológus:

80%
valószínűséggel

Valószínűség fizikában

(1) Ideális gáz sebességeloszlása (Maxwell, 1860)

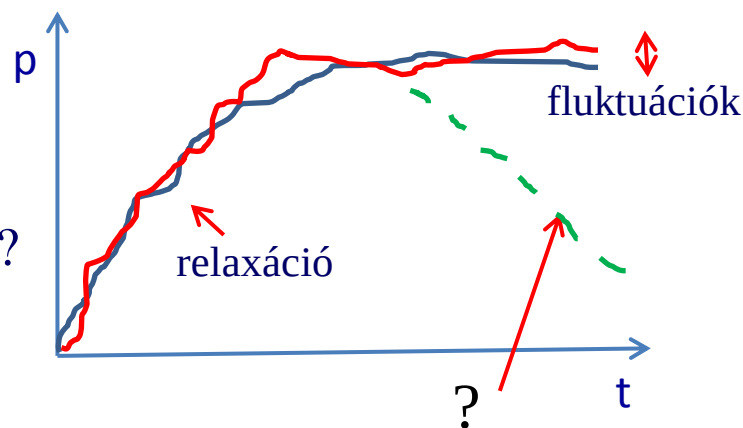
$$P(v) \sim e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Maxwell determinisztikusnak gondolta a mechanikát.

A $6N$ dimenziós állapottérben „minden” állapot egyensúlyi állapot.

(2) Relaxáció és irreverzibilitás

Hogyan lehetséges determinisztikus, időtükrözésre szimmetrikus rendszerben?

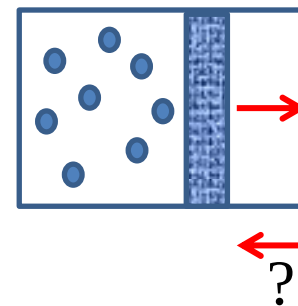


(3) Elektrodinamika determinisztikus.

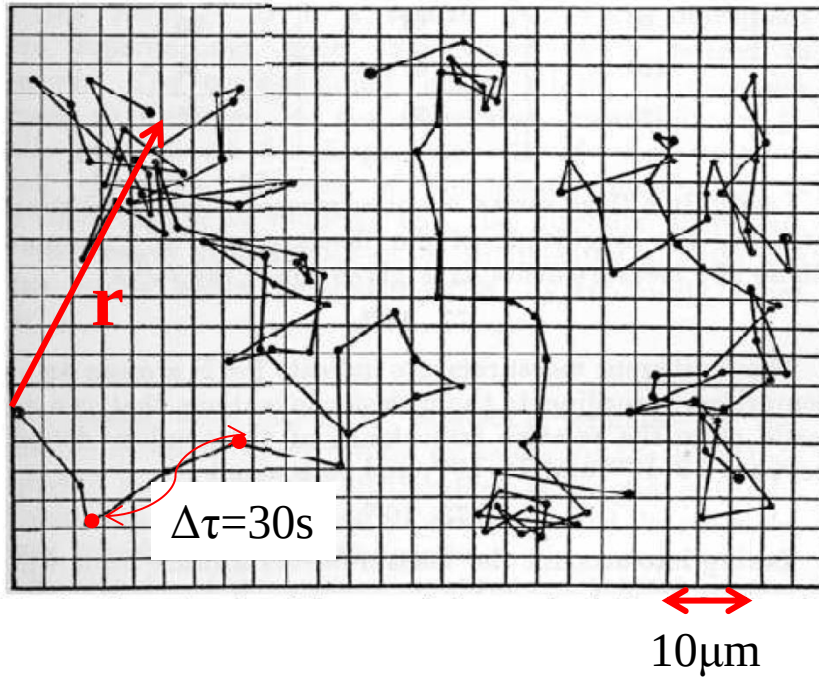
(4) Kvantum mechanika

Determinisztikus és valószínűségi leírás kombinációja:

Az egyenlet determinisztikus, de valószínűségről szól.



Brown mozgás -- véletlenszerű mozgás jellemzése és leírása



Perrin kísérletei, 1908

$$r^2 = 2Dt$$

Avogadro szám meghatározható

Brown, 1827

Élnek-e a virágporszemek?
És a kőporszemek?

Einstein, 1905

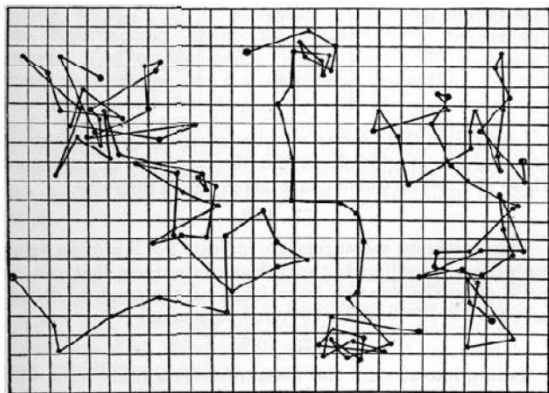
Lényegesen új gondolat:
A dinamika véletlenszerű,
az elmozdulásoknak van egy
valószínűségi eloszlása.

A történethez:

i) Stochasztikus dinamikát először
Rayleigh (1891) feltételez.

ii) Smoluchowski (1906) Einsteintől
függetlenül leírta a Brown mozgást.

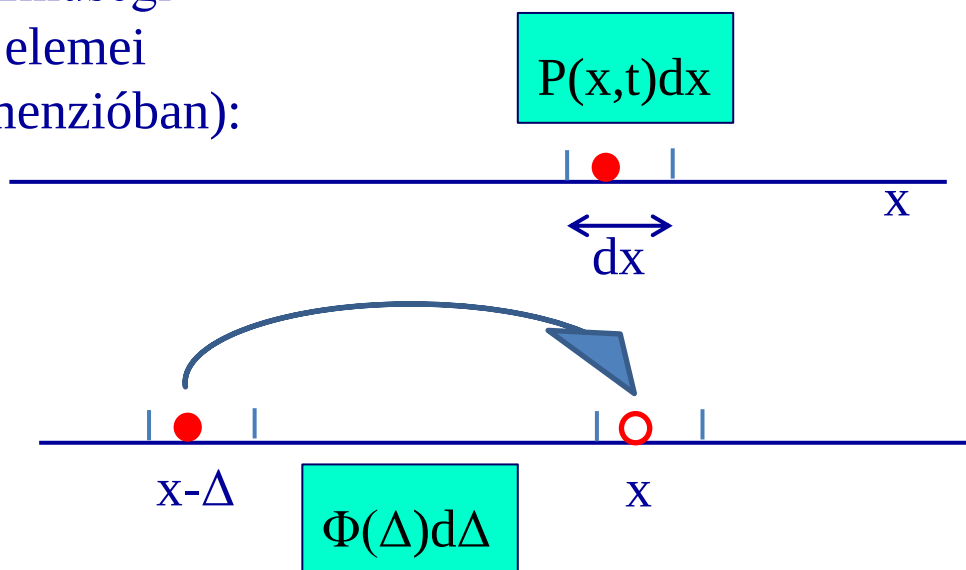
Brown mozgás -- Einstein magyarázata (1905)



Feltételezések:

1. A virágporszemcsék egymástól függetlenül mozognak (elég egyet nézni).
2. Van egy τ intervallum, amin túl a részecske mozgása független az előző mozgásától (τ sokkal kisebb a megfigyelési időnél).
3. A mozgás leírható valószínűségi alapon.

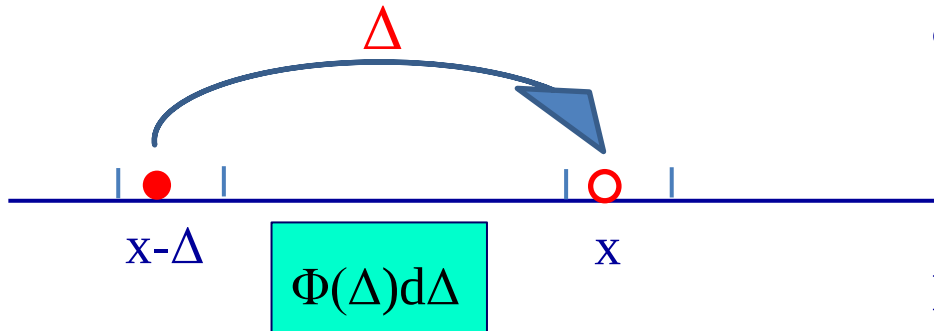
Valószínűségi
leírás elemei
(1 dimenzióban):



Annak a valószínűsége,
hogy a megfigyelt részecske
 t időpontban x és $x+dx$
között található.

Annak a valószínűsége,
hogy a megfigyelt részecske
 τ idő alatt Δ és $\Delta+d\Delta$ közötti
távolságot ugrik előre.

Brown mozgás -- egyenlet a megtalálási valószínűségre I



$\Phi(\Delta)$ tulajdonságai

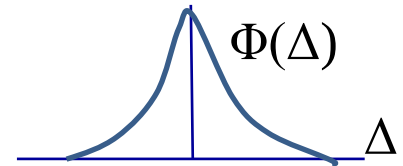
Szimmetria

$$\Phi(-\Delta) = \Phi(\Delta)$$

Normalizáltság

$$\int \Phi(\Delta) d\Delta = 1$$

Nincsenek nagy
ugrások



Egyenlet $P(x,t)$ -re

Markov posztulátum (Einstein 2.)

$P(x, t + \tau)$ csak $P(x, t)$ -től függ

Ugrási dinamikából következően:

$$P(x, t + \tau) dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(x - \Delta, t) dx \Phi(\Delta) d\Delta$$

Chapman-Kolmogorov egyenlet

A történethez: Einstein levezetésének minden lépéséből egy kutatási terület nőtt ki.

Brown mozgás -- egyenlet a megtalálási valószínűségre II

$$P(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x - \Delta, t) \Phi(\Delta) d\Delta$$

Chapman-Kolmogorov egyenlet

(a valószínűségmegmaradást írja le)

Sorfejtések: τ kicsi (a megfigyelési időhöz képest)
 Δ (a τ idő alatt megtett távolság kicsi)

$$P(x, t + \tau) = P(x, t) + \frac{\partial P}{\partial t} \tau + \dots \quad P(x - \Delta, t) = P(x, t) - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x} \Delta^2 + \dots$$

Kramers-Moyal sorfejtés

$$\cancel{P(x, t)} + \frac{\partial P}{\partial t} \tau = \cancel{P(x, t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta}_1 - \frac{\partial P}{\partial x} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \Delta \Phi(\Delta) d\Delta}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \Phi(\Delta) d\Delta$$

Fokker-Planck egyenlet

$$\frac{\partial P}{\partial t} \tau = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \Phi(\Delta) d\Delta$$

Brown mozgás -- egyenlet a megtalálási valószínűségre III

Einstein 1, 2, 3.

$$P(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x - \Delta, t) \Phi(\Delta) d\Delta$$

Chapman-Kolmogorov egyenlet



Kramers-Moyal sorfejtés



Fokker-Planck egyenlet
(adott esetben a diffúziós egyenlet)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$D = \frac{\overline{\Delta^2}}{2\tau}$$

Diffúziós egyenlet megoldása

$P(x, t=0) = \delta(x)$ a részecske az origóból indul

$$\overline{\Delta^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \Phi(\Delta) d\Delta$$

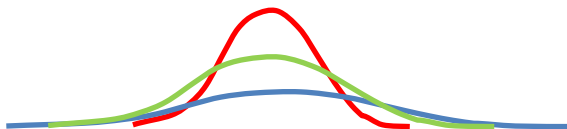
$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$



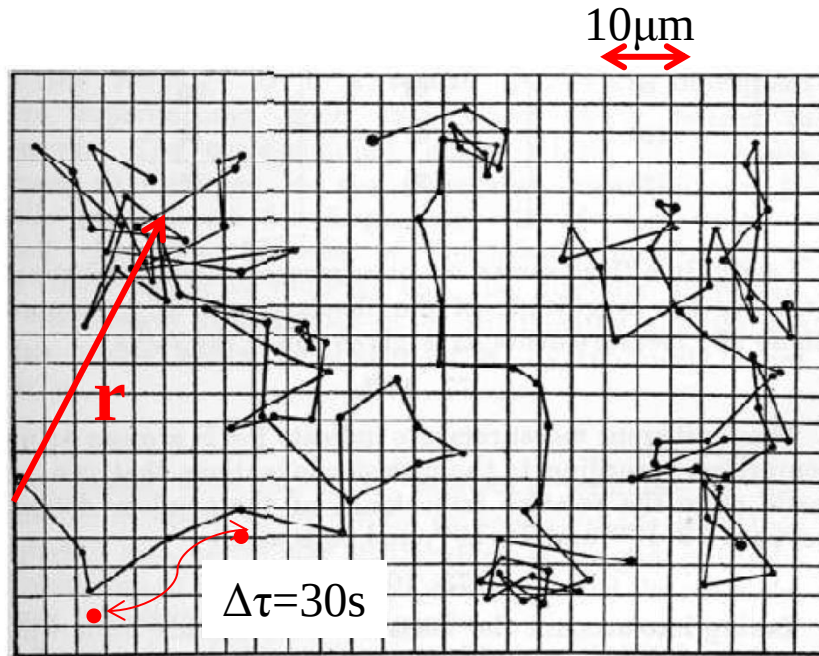
$$\overline{x^2} = 2Dt$$



A diffúziós együtthatón keresztül az Avogadro szám meghatározható!



Brown mozgás -- leírás sztochasztikus differenciál egyenlettel



Perrin kísérletei, 1908

$$r^2 = 2Dt$$

Kísérlet: **D** makroszkópicusan mérhető
Elmélet: **D** mikroszkópikus mennyiségeken
keresztül kifejezhető
Avogadro szám meghatározható

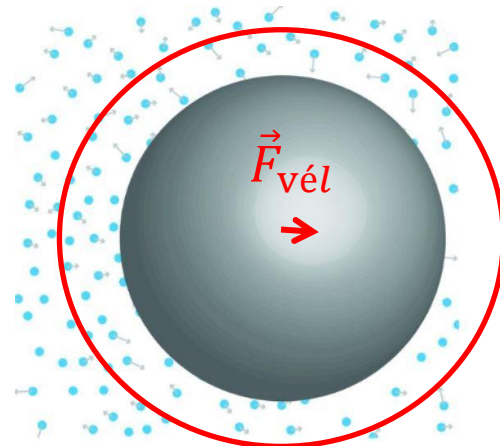
Einstein, 1905

A dinamika véletlenszerű,
az elmozdulásoknak van egy
valószínűségi eloszlása, $P(x,t)$.

Langevin, 1908

Mozgásegyenlet, amelyben
determinisztikus és véletlen
(sztochasztikus) erő is van

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{det} + \vec{F}_{vél}$$



Brown mozgás – a mozgásegyenlet

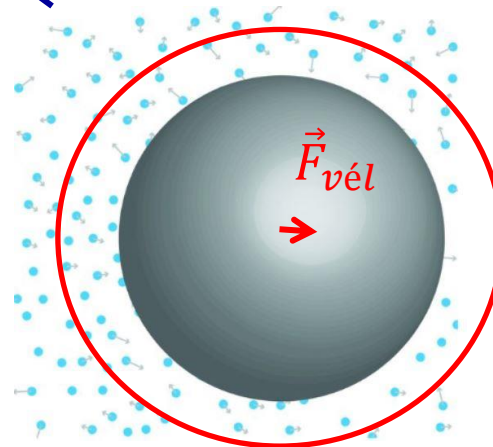
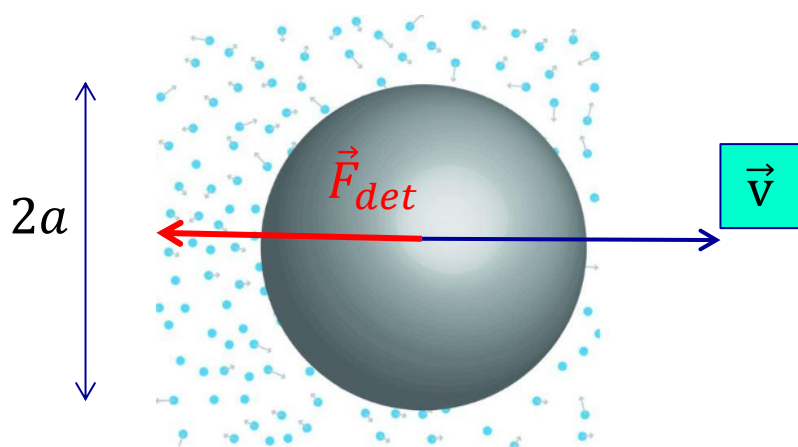
Langevin, 1908

A determinisztikus és a véletlen szétválasztása

Determinisztikus erő
makroszkópikus szintről:
Súrlódási erő

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{det} + \vec{F}_{vél}$$

Véletlen mikroszkópikus szinten:
Fluktuációk a gáz részecskéinek
helyében és sebességében



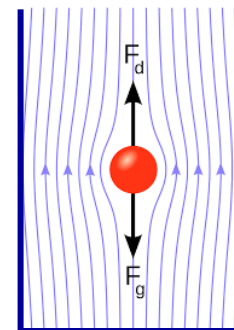
Hidrodinamikából: Stokes törvény:

$$\vec{F}_{det} = -6\pi\eta a \vec{v}$$

viszkozitás

gömb sugara

Viszkozitás (η) mérése:
Folyadékban süllyedő
golyó végsebessége



A viszkozitásról + egy kis dimenzióanalízis

η definíciója:

$$\vec{F}_x = A \eta \frac{dv_x}{dy}$$

η dimenziója:

$$[\eta] = [F] / \left[\frac{dv_x}{dy} \right] [A] =$$

$$(ML/T^2) / (1/T)(L^2) = M/LT = \text{kg/ms}$$

$$\text{Vízre: } \eta = 10^{-3} \text{kg/ms}$$

Stokes törvény levezetése dimenzióanalízisből:

$$F = f(v, a, \eta) \sim \eta g(v, a) \sim \eta v h(a) \sim \eta v a$$

$$\downarrow$$

$$ML/T^2$$

$$\downarrow$$

$$M/LT$$

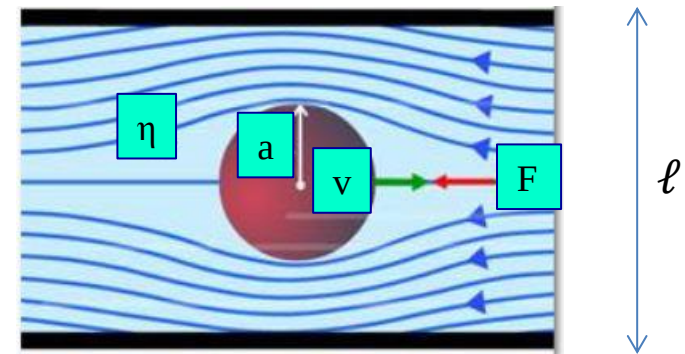
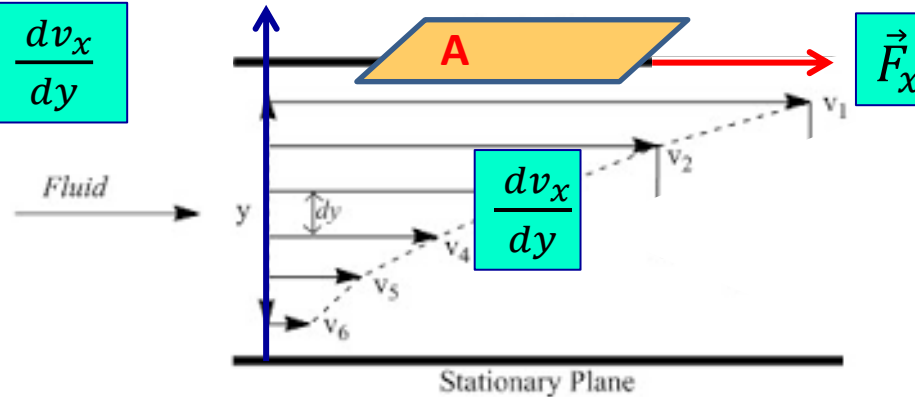
$$M/T^2$$

$$ML/T^2$$

máshol
nincs M

máshonnan nem
jöhet még 1/T

más nem
marad



$$\vec{F}_{det} = -6\pi\eta a \vec{v}$$

$$f(v, a, \eta, \ell) \sim \eta v a Q(a/\ell)$$

Brown mozgás – a mozgásegyenlet (d=1 dimenzióban)

$$m\ddot{x} = -6\pi\eta a\dot{x} + F_{\text{vél}}$$

Mit tudunk a véletlen erőről?

$$\langle F_{\text{vél}} \rangle = 0$$

Mi az amit szeretnénk levezetni?
Egyenletet $\langle x^2 \rangle$ -re.

$$x \cdot \left(x\ddot{x} = (\dot{x}\dot{x}) - \dot{x}^2 = \frac{1}{2}\ddot{x}^2 - \dot{x}^2 \right)$$

$$x\dot{x} = \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}^2 - m\dot{x}^2 = -3\pi\eta a\dot{x}^2 + xF_{\text{vél}}$$

Átlagolás: T hőmérsékleten
egyensúlyban van a rendszer

$$\frac{1}{2}m \langle \ddot{x}^2 \rangle - m \langle \dot{x}^2 \rangle = -3\pi\eta a \langle \dot{x}^2 \rangle + \langle xF_{\text{vél}} \rangle$$

Ekvipartíció:

$$\frac{1}{2}m \langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

$$\langle xF_{\text{vél}} \rangle = 0$$

Átlagos munka

$$\langle xF_{\text{vél}} \rangle > 0 ? \quad T \rightarrow \infty$$

$$\langle xF_{\text{vél}} \rangle < 0 ? \quad T \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{2}m \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - k_B T = -3\pi\eta a \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle + \frac{6\pi\eta a}{m} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{2k_B T}{m}$$

Brown mozgás – a mozgásegyenlet megoldása

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle + \frac{6\pi\eta a}{m} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{2k_B T}{m}$$

$$y = \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle \rightarrow \frac{dy}{dt} + \frac{6\pi\eta a}{m} y = \frac{2k_B T}{m} \rightarrow y = \frac{k_B T}{3\pi\eta a} + C e^{-\frac{6\pi\eta a}{m} t}$$

$$y = \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{3\pi\eta a}$$



$$\langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{3\pi\eta a} t + \tilde{C}$$

nagy t-re

$$\langle x^2 \rangle = 2 \frac{k_B T}{6\pi\eta a} t = 2Dt$$

$$N_A k_B = R$$



gas constant

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a} = \frac{N_A k_B T}{6\pi\eta a} \frac{1}{N_A} = \frac{RT}{6\pi\eta a} \frac{1}{N_A}$$

elhanyagolható $t > 10^{-6}$ s-ra.

$$\frac{6\pi\eta a}{m} = \frac{20 \frac{10^{-3} \text{ kg}}{\text{ms}} 10^{-6} \text{ m}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 10^{-18} \text{ m}^3} = 2 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{s}}$$

Avogadro szám

$$N_A = \frac{RT}{6\pi\eta a D}$$

A történethez: Avogadro számot Perrin vezette be 1908-ban. Avogadro sohasem becsülte meg ezt a számot.

Avogadro szám becslései

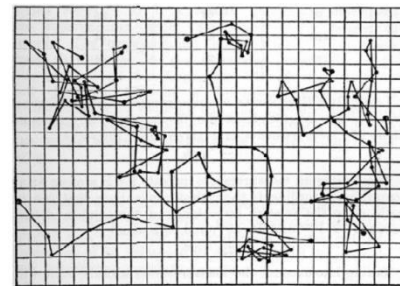
Johann Magnenus, német szerzetes (1646) --- Demokritosból kiindulva, feltételezte, hogy egyfajta atomból épül fel minden. Borsószemnyi tömjént égetett el és szagolt.



'In this piece of incense, which itself was not larger than a pea, there were at least 7.7763×10^{17} elementary atoms. From this one can see how small an atom is and one can guess how large the number of atoms might be in the whole Universe'.

Robert A. Millikan, amerikai fizikus (1909) --- megmérte az elektron töltését (olajcsepp kísérlet), s mivel egy mólnyi elektron töltése ismert volt, csak egy osztás kellett N_A meghatározásához (2% accuracy).

Jean Baptist Perrin, francia fizikus (1909)
Brown mozgás diffúziós állandójának méréséből (0.01% accuracy).



Others

Oil on water, X ray measurements, ...

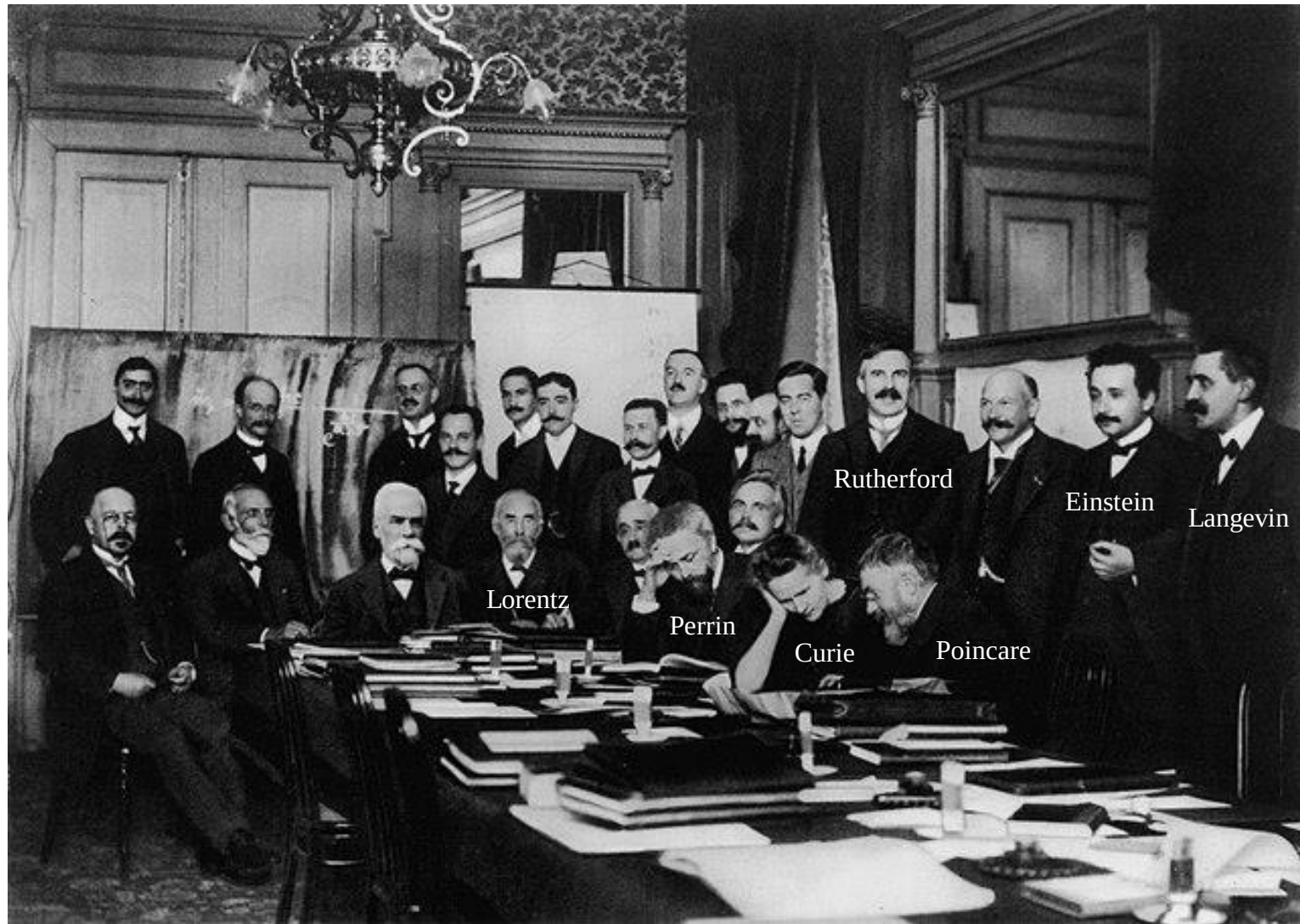
HF2:

$$D = \frac{\overline{\Delta^2}}{2\tau}$$

$$\overline{x^2} = 2Dt$$

Hibaszámitás!!!

Solvey conference - 1911



Hogyan tovább?

Einstein

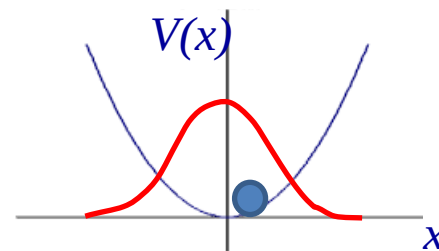
Valószínűségi folyamatok
diszkrét állapot térben,
eloszlások időfejlődése

M(arci) J(ulcsi)

$w(1 \rightarrow 2)$	1			$P(1,t)$
	2			$P(2,t)$
	3			$P(3,t)$
	4			$P(4,t)$

Langevin

Valószínűségi folyamatok
leírása a valószínűségi változóra
vonatkozó egyenletekkel



$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} + F_{\text{vél}} \quad ?$$

$$P(x, t \rightarrow \infty)$$

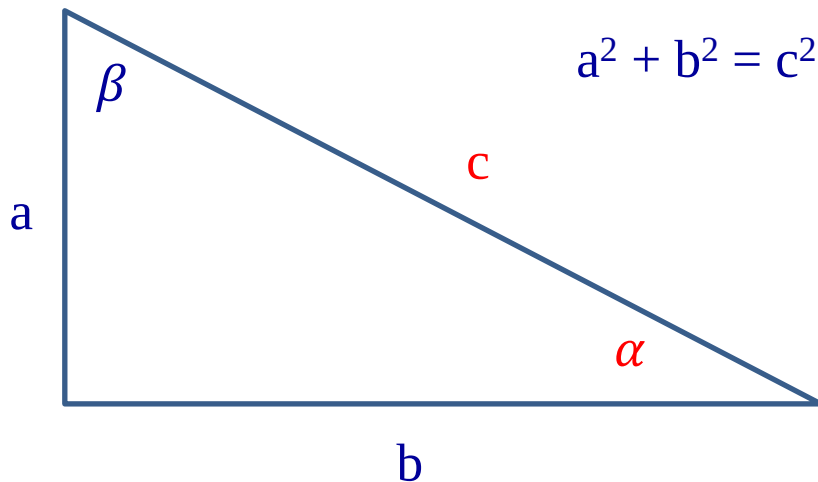
$$P_{eq}(x) \sim e^{-V(x)/k_B T}$$

$$P(1, t+dt) = P(1, t) - w(1 \rightarrow 2)dt P(1, t) + w(2 \rightarrow 1)dt P(2, t) + \dots$$

$$\partial_t P(1, t) = -w(1 \rightarrow 2)P(1, t) + w(2 \rightarrow 1)P(2, t) + \dots$$

⋮

Jutalomjáték – Pitagorasz tétele dimenzióanalízissel



Két paraméter, pl. c és α meghatározzák a derékszögű háromszög tulajdonságait

$$T(c, \alpha) = c^2 f(\alpha)$$

$\uparrow$ $\nwarrow$
 L dimenziótlan

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1(a, \alpha) = a^2 f(\alpha)$$

$$T_2(b, \alpha) = b^2 f(\alpha)$$

$$T = \underline{c^2} f(\alpha) = T_1 + T_2 = \underline{a^2} f(\alpha) + \underline{b^2} f(\alpha)$$

