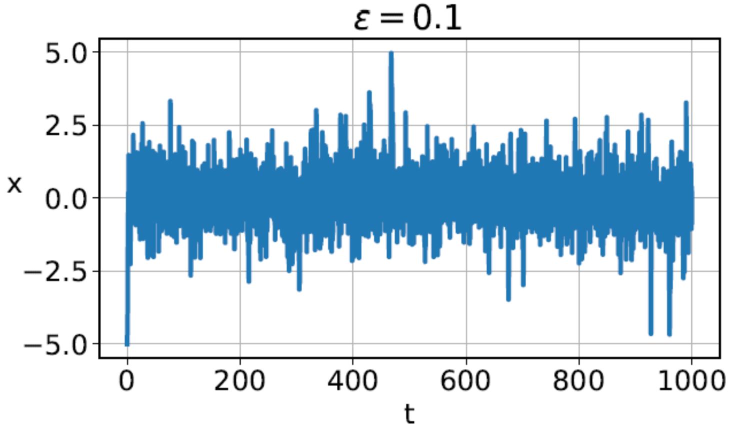
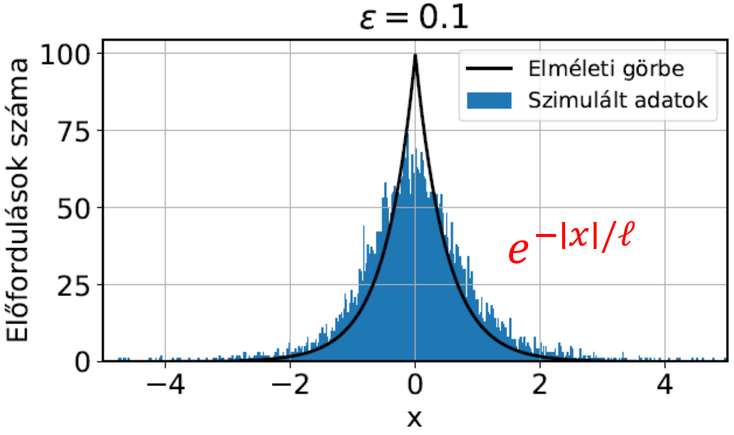
Fluktuációk, korrelációk, teljesítményspektrum

Fluktuációk dinamikája egyensúlyban:

1) Hogyan lehet az egyensúlyi fluktuációk dinamikáját jellemezni?
2) Fluktuációk időkorrelációi, relaxációs idő számolása túlcsillapított oszcillátorra.
3) Mérések: teljesítményspektrum és számolása.
4) Egyszerű áramkörök egyensúlyi fluktuációi.

Egyensúlyi fluktuációk idősorai – mire tudjuk használni?

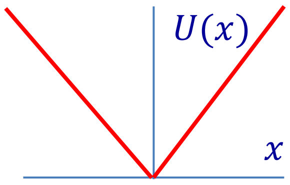




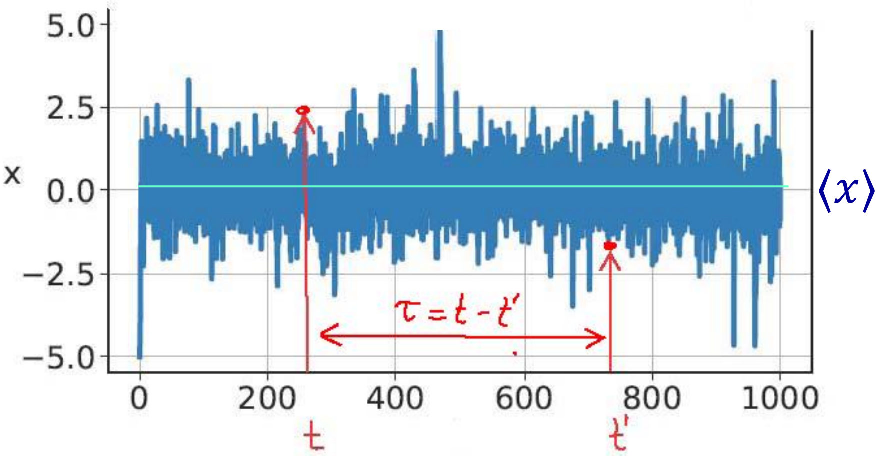
A kitérés hisztogramja az egyensúlyi eloszlásfüggvényt adja: $P^e(x) = \frac{1}{Z} e^{-\beta U(x)} \sim e^{-|x|/\ell}$

Tehát az eloszlásfüggvényből következtethetünk a potenciálra:

$$U(x) = -kT \ln P^e(x) + \mathrm{C} = kT \frac{|x|}{\ell}$$



Dinamika jellemzése: időbeli korrelációk



$$C(t,t') = \langle\, [x(t) - \langle x(t)\rangle]\, [x(t') - \langle x(t')\rangle]\, \rangle$$

Egyensúly: átlagok függetlenek időtől

$$C(t,t') = \langle\, [x(t) - \langle x\rangle]\, [x(t') - \langle x\rangle]\, \rangle$$

$$\boxed{C(t,t') = \langle\, x(t)x(t')\rangle - \langle x\rangle^2}$$

(kétpont) korrelációs függvény

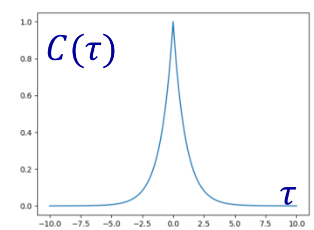
Átlagolás: kezdeti feltételek + hosszú idő
v. ergodicitás → időátlag (hosszú idő)

Tulajdonságok:

i) $\underline{C(t,t') = C(|\, t - t'\,|) \equiv C(\tau)}$

$$x(t)x(t') = x(t')x(t)$$

+ időtükrözési invariancia egyensúlyban



ii) $C(|\, t - t'\,|) \equiv \underline{C(\tau) \to 0}$ ha $|\, t - t'\,| = \underline{\tau > \tau_{rel}}$

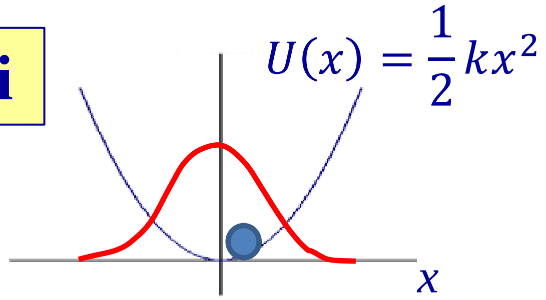
Relaxációs időn túl a kitérések függetlenek

$$C(t,t') = \langle\, x(t)x(t')\rangle - \langle x\rangle^2$$
$$= \langle\, x(t)\rangle\langle x(t')\rangle - \langle x\rangle^2 \to 0$$

iii) $C(|\, t - t'\,| \to 0) \equiv \underline{C(\tau \to 0)} \to \langle\, x^2(t)\rangle - \langle x\rangle^2 = \underline{\langle\, x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$

egyensúlyi fluktuációk

Példa: Túlcsillapított oszcillátor korrelációi



$$\dot{x} = -\mu k x + \eta(t)$$

$$\langle \eta(t) \rangle = 0 \qquad \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad D = \mu k_B T$$

Megoldás: $\quad x(t) = x(0)e^{-\mu k t} + \int_0^t e^{-\mu k(t-t')}\eta(t')dt' \qquad \langle x(t) \rangle = x(0)e^{-\mu k t}$

$$C(t,t') = \langle x(t)x(t') \rangle - \langle x(t) \rangle \langle x(t') \rangle = \boxed{\langle x(t)x(t+\tau) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle x(t+\tau) \rangle = \mathrm{C}(\tau)}$$

$x(t) = x(0)e^{-\mu k t} + \ldots \eta \ldots \qquad \langle x(0)e^{-\mu k t} \times \cdots \eta \ldots \rangle = 0 \qquad \langle x(0) \times x(0) \rangle$ kiesik

$$C(\tau) = \int_0^t dt' \int_0^{t+\tau} dt''\, e^{-\mu k(t-t') - \mu k(t+\tau-t'')} \langle \eta(t')\eta(t'') \rangle$$

$\tau > 0$: második integrál csak t-ig megy $(t' \le t)$ $\qquad 2D\delta(t'-t'')$

$$C(\tau) = 2D \int_0^t dt'\, e^{-\mu k(2t+\tau-2t')} = \frac{D}{\mu k} e^{-\mu k \tau}\left(1 - e^{-2\mu k t}\right)$$

$\tau < 0$:
Integrálási határok
$t + \tau$ lesznek $\rightarrow$
$e^{-\mu k \tau} \rightarrow e^{\mu k \tau}$

Túlcsillapított oszcillátor korrelációs függvénye

$$\frac{D}{\mu k} = \frac{k_B T}{k}$$

$$C(\tau) = \frac{D}{\mu k} e^{-\mu k|\tau|}\left(1 - e^{-2\mu k t}\right) \xrightarrow[t \to \infty]{} \boxed{C(\tau) = \frac{D}{\mu k} e^{-\mu k|\tau|} = \frac{k_B T}{k} e^{-\mu k|\tau|}}$$

Relaxációs idő: $C(\tau) \sim e^{-\mu k|\tau|} \sim e^{-|\tau|/\tau_{rel}} \longrightarrow \boxed{\tau_{rel} = 1/\mu k}$

Egyensúlyi fluktuációk: $C(\tau \to 0) = \dfrac{k_B T}{k} = \langle x^2 \rangle$ $\qquad \dfrac{1}{2} k \langle x^2 \rangle = \dfrac{1}{2} k_B T$

Teljesítményspektrum (mérésekben gyakran adott frekvenciára adott választ vizsgálják)

Többféle definició: 1) $S(\omega) = |X(\omega)|^2$, ahol $X(\omega)$ az $x(t)$ jel Fourier transzformáltja
2) $S(\omega)$ a jel korrelációinak $C(\tau)$-nak a Fourier transzformáltja

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{i\omega\tau} C(\tau) = \frac{k_B T}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{i\omega\tau} e^{-\mu k|\tau|} = \frac{\mu k_B T}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + (\mu k)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{D}{\omega^2 + (\mu k)^2}$$

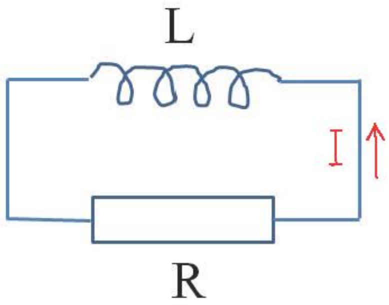
Lorentz görbe $1/\tau_{rel}$ félszélességgel. $\boxed{S(\omega) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{D}{\omega^2 + (1/\tau_{rel})^2}}$

$\longleftarrow$ zaj amplitúdója

$\longleftarrow$ relaxáció

Egyszerű áramkörök teljesítményspektruma

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{D}{\omega^2 + (1/\tau_{rel})^2}$$



Zaj nélkül (Kirchoff II): $L\frac{dI}{dt} + RI = 0$

T hőmérsékleten véletlenszerű feszültségfluktuációk $U_T(t)$: $L\frac{dI}{dt} + RI = U_T(t)$

Túlcsillapított oszcillátor alakra hozható: $\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I + \eta$ $\quad \eta(t) = \frac{U_T(t)}{L}$

feltételezzük:

$I(t) \leftrightarrow x(t)$ $\quad \frac{R}{L} \leftrightarrow \mu k$ $\quad \langle\eta(t)\rangle = 0 \quad \langle\eta(t)\eta(t')\rangle = 2D\delta(t-t')$?

? $\leftrightarrow D = \mu k_B T$

Oszcillátornál az ekvipartícióból határoztuk meg. Hasonló argumentum áramra – az áramkör energiája I áram esetén: $E = LI^2/2$ (tekercs energiája) $-$ $E \sim I^2$.

$$\frac{1}{2}L\langle I^2\rangle = \frac{1}{2}k_B T \leftrightarrow \frac{1}{2}k\langle x^2\rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

$L \leftrightarrow k \longrightarrow \mu = \frac{R}{L^2} \longrightarrow \mathrm{D} = \frac{R}{L^2}k_B T$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{R}{L^2}k_B T}{\omega^2 + (R/L)^2}$$