Sorbanállás - Master egyenlet megoldása generátorfüggvénnyel

Következő előadások: Példák master egyenlet felírására és megoldási módszerekre

Áruház: a sor átlagos hosszának $\langle n \rangle$ és fluktuációinak $\langle n^2 \rangle$-$\langle \mathrm{n} \rangle^2$ kérdése.

w_{ki}

w_{be}

n

Master egyenlet $P_n(t)$-re

Lehetséges állapotok:

$n = 0,1,2,\ldots,\infty$

Lehetséges átmenetek:

$$n' = n \pm 1, \quad n \neq 0$$
$$n' = 1, \qquad n = 0$$

$$\dot{P}_n(t) = -\sum_{n'} w_{n'n}\, P_n(t) + \sum_{n'} w_{nn'}\, P_{n'}(t)$$

$$\boxed{\dot{P}_n(t) = -(\, w_{be} + w_{ki}\,)\, P_n(\mathrm{t}) + w_{be}\, P_{n-1}(\mathrm{t}) + w_{ki}\, P_{n+1}(\mathrm{t})} \qquad n > 0$$

$$\boxed{\dot{P}_0(t) = -w_{be}\, P_0(\mathrm{t}) + w_{ki}\, P_1(\mathrm{t})} \qquad n = 0$$

Határfeltételek fontossága

Dimenzióanalízis: $\langle n \rangle_{st} = \mathrm{f}(w_{be}, w_{ki}) = \mathrm{F}(w_{be}/w_{ki})$

Sorbanállás – időskála, stacionaritás

$$t = t'/w_{ki}$$

$$\dot{P}_n(t) = -(\, w_{be} + w_{ki}\,)\, P_n(\mathrm{t}) + w_{be}\, P_{n-1}(\mathrm{t}) + w_{ki}\, P_{n+1}(\mathrm{t})$$

$$\dot{P}_0(t) = -w_{be}\, P_0(\mathrm{t}) + w_{ki}\, P_1(\mathrm{t})$$

Az időt $1/w_{ki}$ egységekben mérjük, t' dimenziótlan.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} \to w_{ki} \frac{dP_n(t')}{dt'}$$

$$\boxed{\dot{P}_n(t) = -(q+1)\, P_n(\mathrm{t}) + q\, P_{n-1}(\mathrm{t}) + P_{n+1}(\mathrm{t})}$$

$$\boxed{\dot{P}_0(t) = -q\, P_0(\mathrm{t}) + P_1(\mathrm{t})}$$

$$\boxed{q = \frac{w_{be}}{w_{ki}}}$$

Mit szeretnénk kiszámolni?

$$\langle n \rangle_t = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) \qquad \langle n^2 \rangle_t = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) \qquad \longrightarrow \qquad \sigma_t^2 = \langle n^2 \rangle_t - \langle n \rangle_t^2$$

Hosszú idő után → stacionárius állapot: $P_n(t \to \infty) \to P_n^{(s)}$

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n^{(st)} \qquad \langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n^{(st)} \qquad \longrightarrow$$

Stacionárius szórás

$$\sigma = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}$$

Momentumgenerátor függvény

Definíció:

$$G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n(t)$$

Az eloszlásfüggvény momentumait generálja

Tulajdonságok:

$$G(0,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$$

Normalizáció

$$-\left(\frac{\partial G}{\partial s}\right)_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) = \langle n \rangle_t$$

1. momentum

$G(s,t)$ – én keresztül kifejezhetők az általunk keresett mennyiségek

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial^2 s}\right)_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) = \langle n^2 \rangle_t$$

2. momentum

szórás

Általában a k-adik momentum:

$$(-1)^k \left(\frac{\partial^k G}{\partial^k s}\right)_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} n^k P_n(t) = \langle n^k \rangle_t$$

$$\sigma = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^2 G}{\partial^2 s}\right)_{s=0} - \left(\frac{\partial G}{\partial s}\right)_{s=0}^2}$$

Egyenlet a momentumgenerátor függvényre - I

(1) Vesszük a generátorfüggvány időderiváltját: $\dot{G}(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} \dot{P}_n(t)$

(2) A Master egyenletből $\dot{P}_n(t)$-t kifejezhető (az n=0 tag külön figyelmet igényel!):

$$\dot{P}_n(t) = -(q+1)\, P_n(\mathrm{t}) + q\, P_{n-1}(\mathrm{t}) + P_{n+1}(\mathrm{t})$$

$$\dot{P}_0(t) = -q\, P_0(\mathrm{t}) + P_1(\mathrm{t})$$

$$\dot{G}(s,t) = -qP_0 + P_1 - (1+q) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_n + q \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_{n+1}$$

(3) Az összegeket addig alakítjuk, amíg $G(s,t)$ meg nem jelenik:

α $$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_n + P_0 - P_0 = G(s,t) - P_0$$

β $$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_{n-1} = e^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s(n-1)} P_{n-1} = e^{-s} G(s,t)$$

γ $$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_{n+1} = e^{s} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s(n+1)} P_{n+1} = e^{s} \sum_{n=2}^{\infty} e^{-sn} P_n = e^{s} G(s,t) - e^{s} P_0 - P_1$$

Egyenlet a momentumgenerátor függvényre - II

$\alpha\ \beta\ \gamma$ $$\dot{G}(s,t) = (1-e^{s})P_0 - (1+q)G(s,t) + qe^{-s}G(s,t) + e^{s}G(s,t)$$

$$\boxed{\dot{G} = (1-e^{s})P_0 - (1+q-qe^{-s}-e^{s})G}$$

Stacionárius állapot:

$$G(s,t\to\infty) \equiv G_{(st)}(s) \qquad \dot{G}(s,t) = 0 \longrightarrow \boxed{G_{(st)}(s)} = \frac{P_0}{1-qe^{-s}} = \boxed{\frac{1-q}{1-qe^{-s}}}$$

Honnan vesszük P_0-t?

Normalizáció:
$q \leq 1$!

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1 = G(0,t) \longrightarrow G_{(st)}(0) = \frac{P_0}{1-q} = 1 \qquad P_0 = 1-q$$

A sor hosszának és szórásának stacionáris értékei:

$$-\left(\frac{dG_{(st)}}{ds}\right)_{s=0} = \langle n \rangle_{st} = \frac{q}{1-q}$$

$$\left(\frac{d^2G_{st}}{d^2s}\right)_{s=0} = \langle n^2 \rangle_{st} = \frac{q(1+q)}{(1-q)^2}$$

$$\sigma_{st} = \sqrt{\langle n^2 \rangle_{st} - \langle n \rangle_{st}^2} = \frac{\sqrt{q}}{1-q}$$

Eredmények analízise

$$\langle n\rangle_{st} = \frac{q}{1-q} \qquad \sigma_{st} = \frac{\sqrt{q}}{1-q}$$

Látható az egy pénztáros problémája: $\sigma_{st} > \langle n\rangle_{st}$ a releváns $q \leq 1$ tartományban.

Pl. legyen a cél: $\langle n\rangle_{st} = 2 \longrightarrow q = 2/3 \longrightarrow \sigma_{st} = \sqrt{6} \approx 2.4$

Lehetséges fejlesztések: Hosszabb sor esetén a pénztáros gyorsabban dolgozik, Második pénztáros beállítása -- már nehezebb problémák.

Kumulánsgeneráló függvény

Definíció: $\boxed{\Phi(s) = ln\ G(s)}$

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) = \langle n\rangle$$

A mi esetünkben egyszerűsíti σ_{st} számolását (meggyőződni!)

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 s}\right)_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2$$

Kumulánsoknak jelentős szerepük van mint statisztikai jellemzőknek, közelítő módszerek kidolgozásában.

n-edik kumuláns: $$\boxed{(-1)^n \left(\frac{\partial^n \Phi}{\partial^n s}\right)_{s=0} = \kappa_n}$$