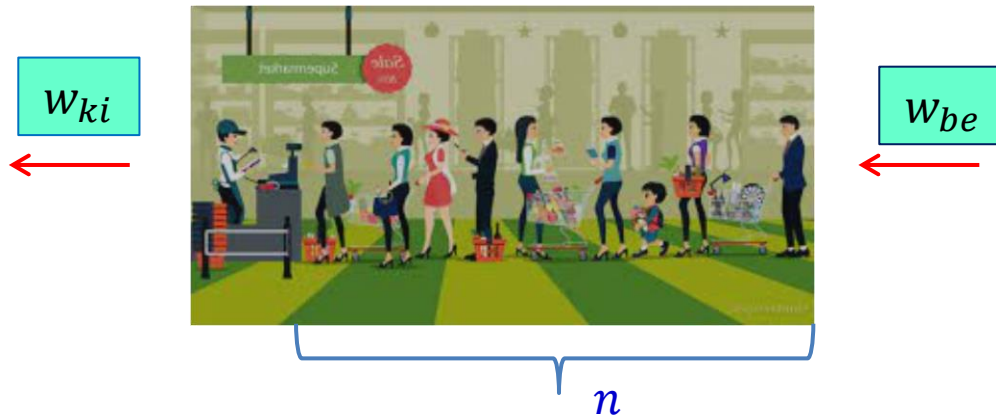


Sorbanállás - Master egyenlet megoldása generátorfüggvénnyel

Következő előadások: Példák master egyenlet felírására és megoldási módszerekre

Áruház: a sor átlagos hosszának $\langle n \rangle$ és fluktuációinak $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ kérdése.



Master egyenlet $P_n(t)$ -re

Lehetséges állapotok:

$$n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Lehetséges átmenetek:

$$\begin{aligned} n' &= n \pm 1, \quad n \neq 0 \\ n' &= 1, \quad n = 0 \end{aligned}$$

$$\dot{P}_n(t) = - \sum_{n'} w_{n'n} P_n(t) + \sum_{n'} w_{nn'} P_{n'}(t)$$



$$\dot{P}_n(t) = -(w_{be} + w_{ki}) P_n(t) + w_{be} P_{n-1}(t) + w_{ki} P_{n+1}(t) \quad n > 0$$

$$\dot{P}_0(t) = -w_{be} P_0(t) + w_{ki} P_1(t) \quad n = 0$$

Határfeltételek fontossága

Dimenzióanalízis: $\langle n \rangle_{st} = f(w_{be}, w_{ki}) = F(w_{be}/w_{ki})$

Sorbanállás – időskála, stacionaritás

$$t = t' / w_{ki}$$

$$\dot{P}_n(t) = -(w_{be} + w_{ki}) P_n(t) + w_{be} P_{n-1}(t) + w_{ki} P_{n+1}(t)$$

$$\dot{P}_0(t) = -w_{be} P_0(t) + w_{ki} P_1(t)$$



$$\dot{P}_n(t) = -(q + 1) P_n(t) + q P_{n-1}(t) + P_{n+1}(t)$$

$$\dot{P}_0(t) = -q P_0(t) + P_1(t)$$

Az időt $1/w_{ki}$ egységekben mérjük, t' dimenziótlan.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} \rightarrow w_{ki} \frac{dP_n(t')}{dt'}$$

$$q = \frac{w_{be}}{w_{ki}}$$



Mit szeretnénk kiszámolni?

$$\langle n \rangle_t = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) \quad \langle n^2 \rangle_t = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) \quad \rightarrow \quad \sigma_t^2 = \langle n^2 \rangle_t - \langle n \rangle_t^2$$

Hosszú idő után \rightarrow stacionárius állapot: $P_n(t \rightarrow \infty) \rightarrow P_n^{(s)}$

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n^{(st)} \quad \langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n^{(st)} \quad \rightarrow \quad \sigma = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}$$

Stacionárius szórás

Momentumgenerátor függvény

Definíció:

$$G(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n(t)$$

Tulajdonságok:

$$G(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1 \quad \text{Normalizáció}$$

$$-\left(\frac{\partial G}{\partial s}\right)_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) = \langle n \rangle_t \quad \text{1. momentum}$$

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial^2 s}\right)_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) = \langle n^2 \rangle_t \quad \text{2. momentum}$$

Általában a k-adik momentum:

$$(-1)^k \left(\frac{\partial^k G}{\partial^k s}\right)_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} n^k P_n(t) = \langle n^k \rangle_t$$

Az eloszlásfüggvény momentumait generálja

$G(s, t)$ – én keresztül kifejezhetők az általunk keresett mennyiségek

↓
szórás

$$\sigma = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^2 G}{\partial^2 s}\right)_{s=0} - \left(\frac{\partial G}{\partial s}\right)_{s=0}^2}$$

Egyenlet a momentumgenerátor függvényre - I

(1) Vesszük a generátorfüggvény időderiváltját: $\dot{G}(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} \dot{P}_n(t)$

(2) A Master egyenletből $\dot{P}_n(t)$ -t kifejezhető (az $n=0$ tag külön figyelmet igényel!):

$$\dot{P}_n(t) = -(q + 1) P_n(t) + q P_{n-1}(t) + P_{n+1}(t)$$

$$\dot{P}_0(t) = -q P_0(t) + P_1(t)$$

$$\dot{G}(s, t) = -q P_0 + P_1 - (1 + q) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_n + q \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_{n+1}$$

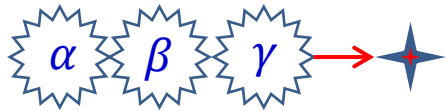
(3) Az összegeket addig alakítjuk, amíg $G(s, t)$ meg nem jelenik:

$$\alpha \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_n + P_0 - P_0 = G(s, t) - P_0$$

$$\beta \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_{n-1} = e^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s(n-1)} P_{n-1} = e^{-s} G(s, t)$$

$$\gamma \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_{n+1} = e^s \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s(n+1)} P_{n+1} = e^s \sum_{n=2}^{\infty} e^{-sn} P_n = e^s G(s, t) - e^s P_0 - P_1$$

Egyenlet a momentumgenerátor függvényre - II



$$\dot{G}(s, t) = (1 - e^s)P_0 - (1 + q)G(s, t) + qe^{-s}G(s, t) + e^sG(s, t)$$

$$\dot{G} = (1 - e^s)P_0 - (1 + q - qe^{-s} - e^s)G$$

Stacionárius állapot:

$$G(s, t \rightarrow \infty) \equiv G_{(st)}(s) \quad \dot{G}(s, t) = 0 \quad \rightarrow \quad G_{(st)}(s) = \frac{P_0}{1 - qe^{-s}} = \frac{1 - q}{1 - qe^{-s}}$$

Honnan vesszük P_0 -t?

Normalizáció:
 $q \leq 1!$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1 = G(0, t) \quad \rightarrow \quad G_{(st)}(0) = \frac{P_0}{1 - q} = 1 \quad P_0 = 1 - q$$

A sor hosszának és szórásának stacionáris értékei:

$$-\left(\frac{dG_{(st)}}{ds}\right)_{s=0} = \langle n \rangle_{st} = \frac{q}{1 - q}$$

$$\left(\frac{d^2G_{st}}{d^2s}\right)_{s=0} = \langle n^2 \rangle_{st} = \frac{q(1 + q)}{(1 - q)^2}$$

$$\sigma_{st} = \sqrt{\langle n^2 \rangle_{st} - \langle n \rangle_{st}^2} = \frac{\sqrt{q}}{1 - q}$$

Eredmények analízise

$$\langle n \rangle_{st} = \frac{q}{1-q} \quad \sigma_{st} = \frac{\sqrt{q}}{1-q}$$

Látható az egy pénztáros problémája: $\sigma_{st} > \langle n \rangle_{st}$ a releváns $q \leq 1$ tartományban.

Pl. legyen a cél: $\langle n \rangle_{st} = 2 \longrightarrow q = 2/3 \longrightarrow \sigma_{st} = \sqrt{6} \approx 2.4$

Lehetséges fejlesztések: Hosszabb sor esetén a pénztáros gyorsabban dolgozik,
Második pénztáros beállítása -- már nehezebb problémák.

Kumulánsgeneráló függvény

Definíció: $\Phi(s) = \ln G(s)$

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) = \langle n \rangle$$

Kumulánsoknak jelentős szerepük van mint statisztikai jellemzőknek, közelítő módszerek kidolgozásában.

A mi esetünkben egyszerűsíti σ_{st} számolását (meggyőződni!)

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 s}\right)_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$$

n-edik kumuláns:

$$(-1)^n \left(\frac{\partial^n \Phi}{\partial^n s}\right)_{s=0} = \kappa_n$$