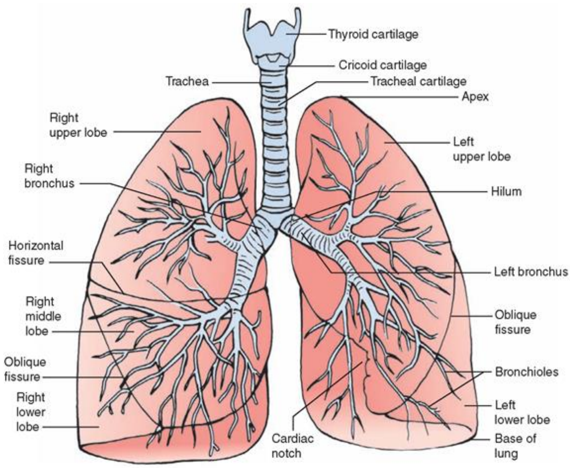
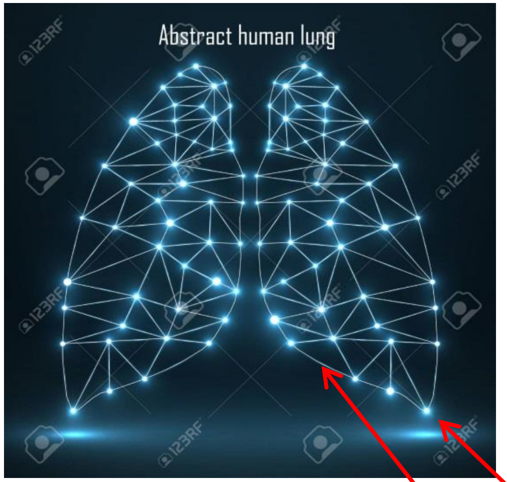
Növekvő hálózatok a master egyenlet perspektívájából

Eddig: Elsősorban stacionárius állapotok megtalálása stochasztikus folyamatokban.
Most: Növekedési folyamatok dinamikájának leírása hálózatok példáján.

A példák: (1) Erdős-Rényi gráf építése master egyenlettel.
(2) Véletlen rekurzív háló kvázistacionárius tulajdonságai.
(3) Preferenciális csatolódás dinamikája.

Hálózatok mindenütt ott vannak, s az interpretáció igen változatos lehet. Pl.:

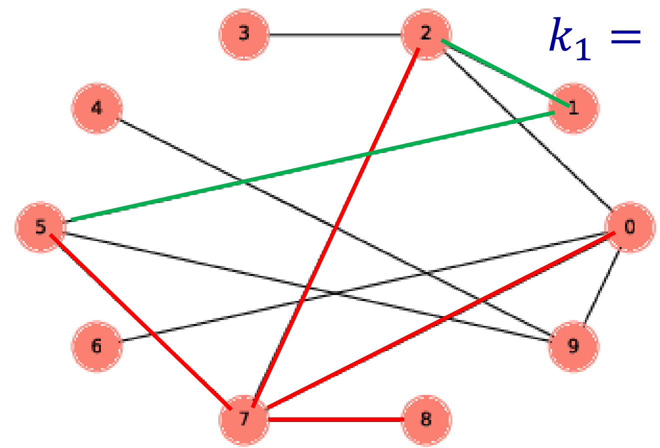




Tüdő: hörgők-hörgőcskék-tüdőhólyagok

Hálózat: levegő útja: élek
találkozási pontok: csúcsok

Hálózatok csúcs-él szintű jellemzése



$k_1 = 2$

$k_7 = 4$

Egyszerűsítés (nem túl realisztikus):
Csúcsoknak, éleknek nincsenek extra tulajdonságai (pl. repülőterek és összekötő járatok hasonlóak?!).

Mi marad jellemezésre?
Pl. a csúcsok összekötöttsége, fokszáma, k.

N – csúcsok száma
N_k – k-fokszámú csúcsok száma $\rightarrow$ $\boxed{P_k = \frac{N_k}{N}}$

Fokszám eloszlás (véletlenszerűen kiválasztott csúcs fokszáma) – ezzel foglalkozunk a továbbiakban

Hálózatok fontos jellemzője az átlagos fokszám: $\langle k \rangle = \sum_k k P_k$

Sok más jellemző is van, pl. a szomszédsági mátrix:

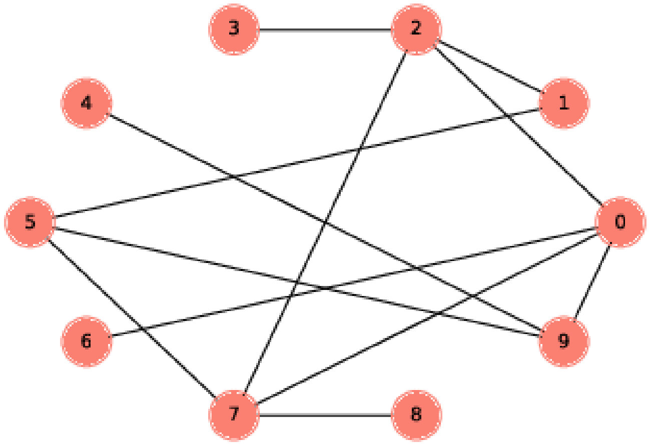
$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \dots & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 1 & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Növekedési dinamika változatai:

1) Csúcsok száma fix, élek száma nő (Erdős-Rényi)
2) Csúcsok és élek száma egyaránt nő
   Véletlen rekurzív és preferenciális növekedés

Hálózatok I.: Erdős-Rényi gráf növekedési dinamikából

Csúcsok száma, N, fix, élek száma nő:
Példa: Nyári táborba érkezett gyerekek (csúcsok) között barátságok (élek) jönnek létre.



Kérdés: Ha a barátságok (élek) véletlenszerűen szövődnek, akkor idővel mi lesz a *barátságszám eloszlás*? Átlag körül keskeny vagy széles? Exponenciális? Hatványszerű?

Dinamika: Kezdetben nincs él.
Élek keletkezésének rátája: egységnyi idő alatt $N/2$ élt rakunk le (t idő alatt $Nt/2$ élt – minden csúcs átlagosan 1 élt kap egységnyi idő alatt).

t idő elteltével az átlagos fokszám:

$$\langle k \rangle = \sum_k k P_k = \sum_k k \frac{N_k}{N} = \frac{1}{N} \underbrace{\sum_k k N_k}_{\text{minden él 2x számolva}} = \frac{2 * \text{élek száma}}{N} = \mathrm{t}$$

Erdős-Rényi: Master egyenlet a fokszám eloszlásra

N_k megváltozása Δt idő alatt: $N_k(t+\Delta t) = N_k(t) + \underbrace{N_{k-1}(t)\Delta t}_{k-1} - \underbrace{N_k(t)\,\Delta t}_{k}$

élkel rendelkező csúcsokhoz adott új élek száma

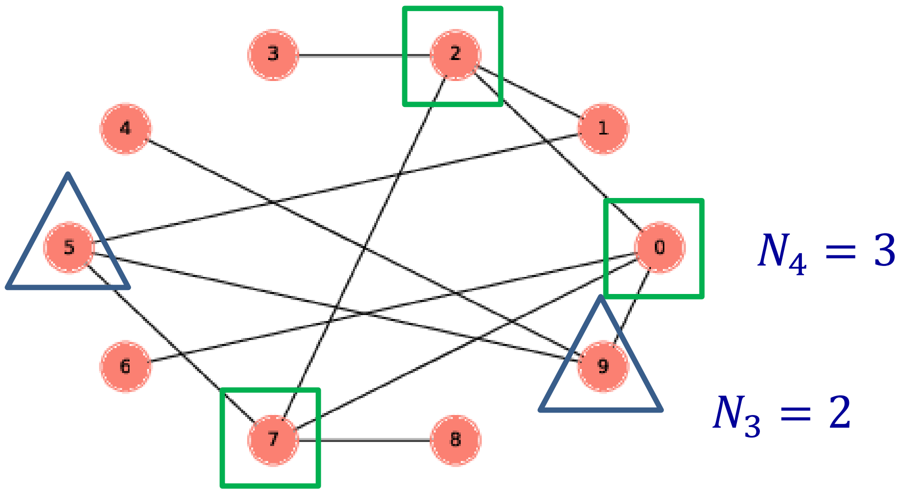
Él-hozzáadás ráta: egységnyi idő alatt átlagosan minden csúcs kap egy élt

$$\dot{N}_k(t) = N_{k-1}(t) - N_k(t)$$

$k = 0$ külön kezelése:

$$N_0(t+\Delta t) = N_0(t) - N_0(t)\,\Delta t$$

$$\dot{N}_0(t) = -N_0(t)$$



Mivel $N =$ állandó és $P_k = \frac{N_k}{N}$, a fenti egyenleteket leosztva N-nel megkapjuk a master egyenletet a fokszám eloszlásra:

$$\boxed{\dot{P}_k(t) = P_{k-1}(t) - P_k(t)} \qquad \boxed{\dot{P}_0(t) = -P_0(t)}$$

Erdős-Rényi: Master egyenlet megoldása generátor függvénnyel

$$\boxed{\dot{P}_k(t) = P_{k-1}(t) - P_k(t)}$$

$$\boxed{\dot{P}_0(t) = -P_0(t)}$$

Generátor függvény: $G(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} P_k(t)$

$$\dot{G}(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk}\dot{P}_k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-sk} P_{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} P_k = e^{-s}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-s(k-1)} P_{k-1}(t) - G(s,t)$$

$$\dot{G}(s,t) = (e^{-s} - 1)G(s,t) \longrightarrow G(s,t) = Ce^{(e^{-s}-1)t}$$

Normalization:

$$G(0,t) = C = 1$$

$$\boxed{G(s,t) = e^{(e^{-s}-1)t}}$$

$P_k(t)$meghatározása sorfejtésből:

$$G(s,t) = e^{(e^{-s}-1)t} = e^{-t}e^{e^{-s}t}$$

$$= e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(e^{-s}t)^k = \underline{e^{-t}}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk}\frac{t^k}{\underline{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk}\underline{P_k(t)}$$

$$\boxed{P_k(t) = e^{-t}\frac{t^k}{k!}}$$

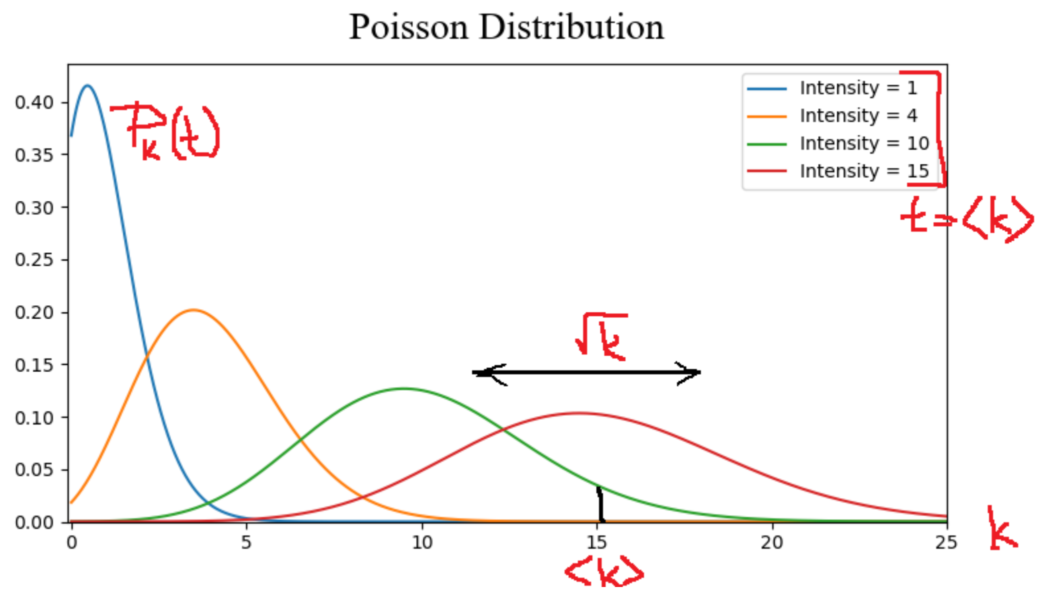
Poisson distribution

Erdős-Rényi dinamika: Poisson fokszám eloszlás

$$P_k(t) = e^{-t}\frac{t^k}{k!}$$

Poisson eloszlás tulajdonsága:
átlag = szórásnégyzettel.

$$\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \langle k \rangle = t$$



(1) Barátok átlagos száma $\langle k \rangle$ lineárisan nő t-vel.

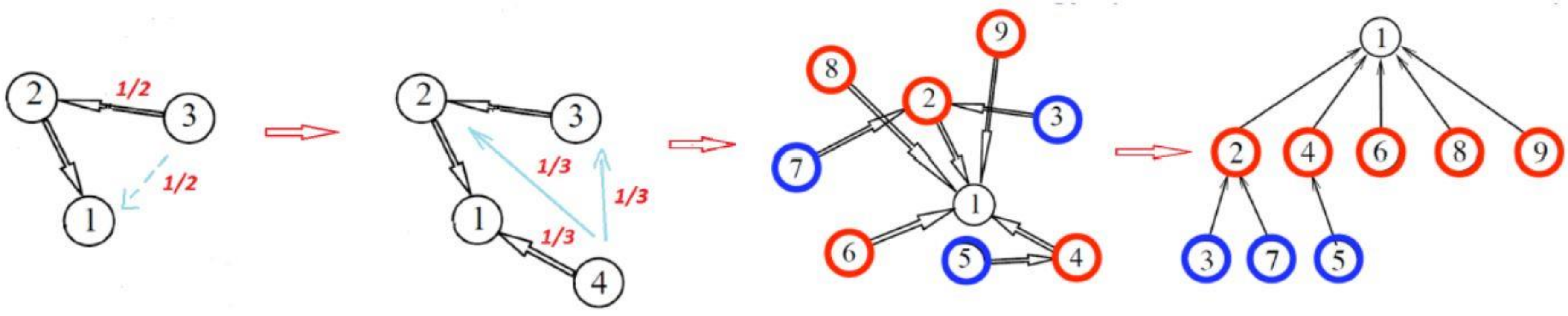
(2) Majdnem mindenkinek ugyanannyi barátja van: a szórás $\sqrt{\langle k \rangle}$.

Poisson eloszlás $\langle k \rangle \to \infty$ esetén Gauss eloszlásba megy át.

Hálózatok II.: Véletlen rekurzív háló növekedési dinamikája

Eddig: a Master egyenletek stacionárius vagy teljes időfüggő megoldása.
Új elem a Master egyenletek kezelésében: kvázistacionárius megoldások.

Példa: Véletlen rekurzív háló építése (barátságok?!):
Minden lépésben 1 új csúcsot adunk a meglévő hálóhoz,
egyenlő valószínűséggel bármelyik csúcshoz.



Számolás célja: $P_k = \dfrac{N_k}{N}$

fokszám eloszlás

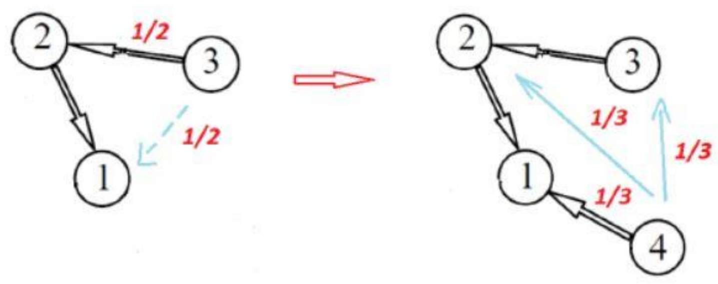
Bonyolultnak látszik, de egyszerű fastruktúra van a háttérben.

Modell: Idő arányos a csúcsok számával (N). Időnövekmény: $\Delta t = 1 \ \ (N \to N+1)$.
(Fizikai folyamatokban a növekedés függhet a háló nagyságától.)

Véletlen rekurzív háló: Master egyenlet a fokszám eloszlásra

Mi történik egy lépésben?

$$P_k = \frac{N_k}{N} \leftarrow k \text{ élű csúcsok száma}$$



i) a csúcsok száma: $N \to N+1$,
ii) a hozzáadott csúcs 1-es fokszámú,
iii) a meglévő csúcsok fokszáma $1/N$ valószínűséggel nő

$$N_k(N+1) = N_k(N) \underbrace{-\frac{1}{N}N_k(N)}_{k \text{ élű csúcshoz csatolódás}} + \underbrace{\frac{1}{N}N_{k-1}(N)}_{k\text{-}1 \text{ élű csúcshoz csatolódás}}$$

$$N_1(N+1) = N_1(N) - \frac{1}{N}N_1(N) + \underbrace{1}_{\text{új, } 1\text{-es élű csúcs megjelenése}}$$

$N \gg 1$

$$\boxed{\frac{dN_k}{dN} = -\frac{N_k}{N} + \frac{N_{k-1}}{N}}$$

$$\boxed{\frac{dN_1}{dN} = -\frac{N_1}{N} + 1}$$

Hogyan tovább?

Ha véges k-ból jön a fő járulék, akkor $N_k \sim N$.

Fokszám 2-vel nő minden lépésben

$$\sum_{k=1}^{\infty} kN_k = 2N - 2$$

$$P_k = \frac{N_k}{N} \rightarrow N_k = NP_k$$

független N-től

Véletlen rekurzív háló: Master egyenlet kvázistacionárius közelítése

$$\boxed{\frac{dN_k}{dN} = -\frac{N_k}{N} + \frac{N_{k-1}}{N}} \qquad \boxed{\frac{dN_1}{dN} = -\frac{N_1}{N} + 1}$$

$\underline{N \gg 1}$ $\qquad N_k = N P_k$ ← független N-től

$$\frac{d(NP_k)}{dN} = P_k = -\frac{NP_k}{N} + \frac{NP_{k-1}}{N} = -P_k + P_{k-1}$$

$$\frac{d(NP_1)}{dN} = P_1 = -\frac{NP_1}{N} + 1 = -P_1 + 1$$

$$P_k = -P_k + P_{k-1} \qquad P_1 = -P_1 + 1$$

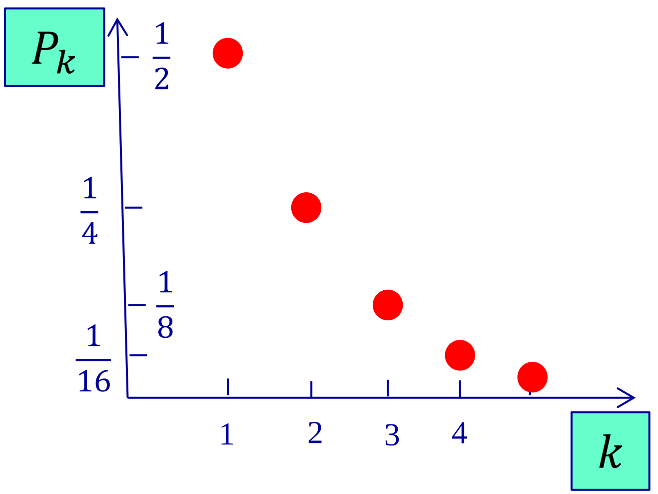
$$P_k = \frac{P_{k-1}}{2} \qquad P_1 = \frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{P_k = \frac{1}{2^k} = e^{-ln2 \cdot k}}$$

Átlagos fokszám (barátok száma):

$$\langle k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{2^k} = 2$$

De:

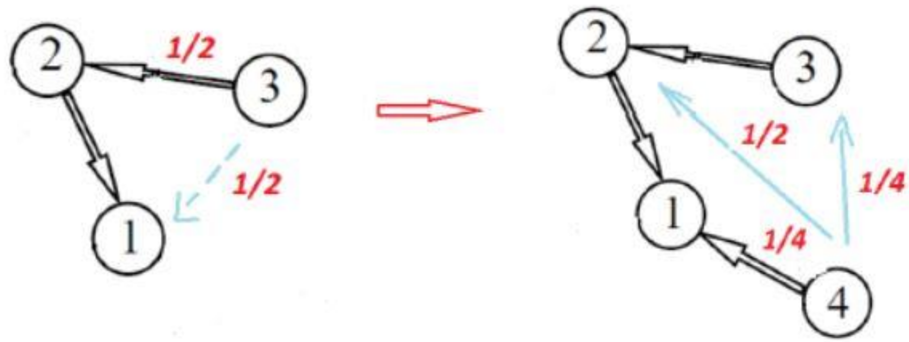
$P_1 = \frac{1}{2}$ $\quad$ 50%-nak csak 1 barát jut. $\qquad P_4 = \frac{1}{16} \approx 0.06$



Hálózatok III.: Lineáris preferenciális csatolódás modellje

Barabási László-Albert, Albert Réka, 1999

A barátеloszlás széles, vannak akiknek sok barátjuk van.
Próbálkozás ennek leírására: preferenciális csatolódás (lineáris).



i) Minden lépésben 1 új csúcsot adunk a meglévő hálóhoz
ii) Egy csúcshoz csatolódás valószínűsége arányos a csúcs éleinek számával.

$$p_{csat}(k) = Ak \qquad (k^{\gamma}\ ?)$$

iii) Normalizáció (1 lépésben valahová csatolódik az új csúcs)

$$\sum_k p_{csat}(k) N_k = \sum_k Ak\, N_k = 1$$

$$p_{csat}(k) = \frac{k}{\sum_1^N k' N_{k'}} = \frac{k}{2N}$$

$$2(N-1) \approx 2N$$

Master egyenlet deriválása fokszám eloszlásra

$$N_k(N+1) = N_k(N) - \underbrace{\frac{k}{2N} N_k(N)}_{\text{k élű csúcshoz csatolódás}} + \underbrace{\frac{k-1}{2N} N_{k-1}(N)}_{\text{k-1 élű csúcshoz csatolódás}}$$

$$N_1(N+1) = N_1(N) - \frac{1}{2N} N_1(N) + 1$$

új, *1*-es élű csúcs megjelenése

Lineáris preferenciális dinamika kvázistacionárius közelítése

$$N_k(N+1) = N_k(N) - \frac{k}{2N} N_k(N) + \frac{k-1}{2N} N_{k-1}(N)$$

$$N_1(N+1) = N_1(N) - \frac{1}{2N} N_1(N) + 1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dN_k}{dN} = -\frac{kN_k}{2N} + \frac{(k-1)N_{k-1}}{2N}$$

$$\frac{dN_1}{dN} = -\frac{N_1}{2N} + 1$$

$\Downarrow$

$$\frac{dNP_k}{dN} = -\frac{k}{2}P_k + \frac{k-1}{2}P_{k-1}$$

$$\frac{dNP_1}{dN} = -\frac{1}{2}P_1 + 1$$

$\Downarrow$

$$P_k = -\frac{k}{2}P_k + \frac{k-1}{2}P_{k-1}$$

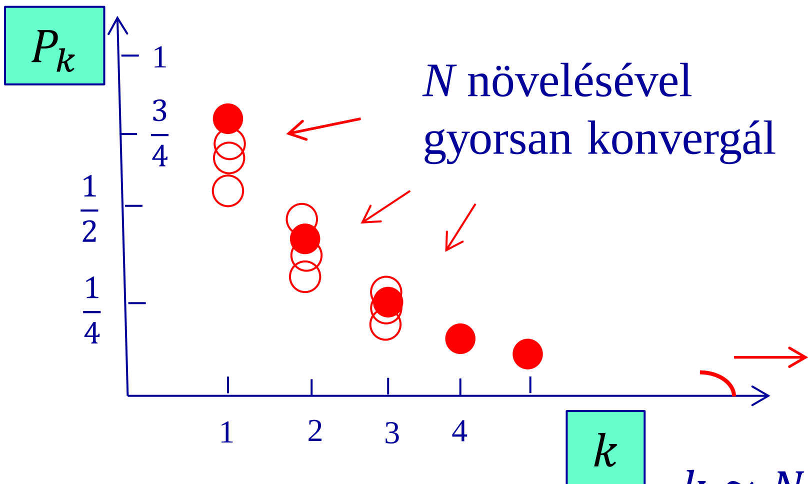
$$P_1 = -\frac{1}{2}P_1 + 1$$

$$\boxed{P_1 = \frac{2}{3}} \qquad \boxed{P_k = \frac{k-1}{k+2}P_{k-1}}$$

Kvázistacionárius közelítés

$$N_k = NP_k$$

független
N-től



$k \approx N$

front megy kifelé, nem lényeges véges k-ra

Lineáris preferenciális dinamika fokszámeloszlása

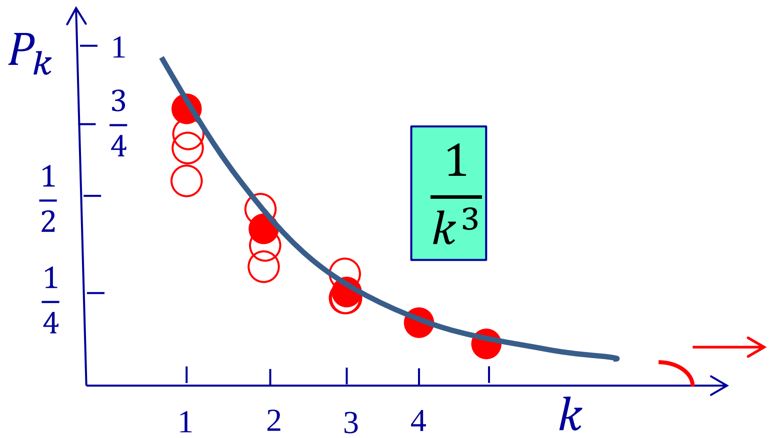
Rekurzió a fokszámeloszlásra: $\boxed{P_1 = \frac{2}{3}}$ $\boxed{P_k = \frac{k-1}{k+2} P_{k-1}}$

A rekurzió megoldása

$$P_k = \frac{k-1}{k+2} P_{k-1} = \frac{(k-1)(k-2)}{(k+2)(k+1)} P_{k-2} = \cdots = \frac{(k-1)!}{(k+2)!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot P_1 = \frac{4}{(k+2)(k+1)k}$$

Hatványszerűen lecsengő fokszámeloszlás: $\boxed{P_k = \frac{4}{(k+2)(k+1)k} \approx \frac{4}{k^3}}$

Jelentős valószínűség nagyszámú barátra. A kapcsolati hálókban mért eloszlások valóban hatványszerűen csengenek le, de a γ hatvány a $P_k \sim 1/k^\gamma$ összefüggésben általában kisebb 3-nál.



$k \approx N$

front megy kifelé