Véletlen folyamatok házi feladatai. 1. hét. Beadási határidő: Feb. 24, 12:20.

(1)

Soroljunk fel véletlenszerűnek tűnő jelenségeket, s próbáljuk megmagyarázni, hogy miért gondoljuk véletlenszerűnek, s mi van a jelenség hátterében!

(2)

Néhány egyszerű valószínűségszámítási példa.

Feldobott érme leesése után egyenlő valószínűséggel fej (F) vagy írás (I).

(a) Dobjuk fel az érmét kétszer. Milyen valószínűséggel kapunk két fejet (FF), illetve fej-írás (FI) sorrendet? Ugyanaz a két valószínűség?

(b) A dobásokat addig folytatjuk míg egymás után ki nem jön két fej (FF). Átlagosan hány dobás után történik ez? Mi a helyzet, ha addig dobunk, míg a fej-írás kombináció (FI) jön ki. Ugyanazt az eredmény?

(c) Játsszuk a következő játékot! Addig dobálunk, amíg vagy két fej (FF - én nyerek), vagy fej-írás (FI - te nyersz) jön ki. Igazságos ez a játék?

(3)

Egydimenziós mozgást végző részecske τ időközönként véletlen irányú erő hatására előző helyzetétől ℓ távolságra ugrik (egyenlő $p_+ = p_- = 1/2$ valószínűséggel jobbra vagy balra). A részecske az $x_0 = 0$ pontból indul.

Határozzuk meg a $t = N\tau$ idő alatti elmozdulás és az elmozdulás négyzetének átlagát, $\langle x_t \rangle$-t és $\langle x_t^2 \rangle$-t!

Vizsgáljuk a fenti problémát $p_+ = 2p_-$ esetre és számítsuk ki az $\langle x_t \rangle$, $\langle x_t^2 \rangle$ és $\langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2$ átlagokat!

(4) Vizsgáljuk a Brown mozgás előadáson tárgyalt, Einstein féle leírását, s legyen sodródás is a rendszerben (szél fúj a víz felett). Ekkor a τ időnként megtett ugrások hosszának (Δ) valószínűségi eloszlása nem szimmetrikus $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$, s várhatóan $\overline{\Delta} = \int \Delta\Phi(\Delta)d\Delta \neq 0$. Irjuk fel a Chapman-Kolmogorov egyenletet, s deriváljuk a részecske megtalálási valószínűségét, $P(x,t)$-t meghatározó Fokker-Plack egyenletet! Mennyiben különbözik ez az egyenlet az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől? Próbáljuk meg felírni az egyenlet megoldását arra az esetre, ha a virágporszem az origóból indul!

(5)

Nem kötelező, bármikor beadható az év folyamán. Azoknak írtam ki, akik érdeklődnek a köz által vitatott kérdések iránt (de esetleg az évvégi jóindulatú kerekítéseknél figyelembe veszem a megoldását).

A Föld átlagos hőmérsékletében megfigyelhető 100 éves melegedési trendet a mérések $a = 0.7^0C/100$év-nek adják. Ezt az értéket úgy számítják, hogy a megfigyelt évi átlagértékekhez ($T_i, \quad i = 1, 2, ..., N = 100$) lineáris függvényt fittelnek

$$T_i = a\frac{i}{N} + b \quad , \tag{1}$$

s a adja a trend N évre vonatkoztatott értékét.

A fittelés a legkisebb négyzetes eltérést keresve történik, azaz a és b paramétereket a

$$\sum_{i=1}^{N} [T_i - (a\frac{i}{N} + b)]^2 \tag{2}$$

kifejezést minimalizálásal számítják.

A melegedéssel kapcsolatos vita részben azzal kapcsolatos, hogy a megfigyelt a érték statisztikus fluktuáció-e. A problémát nulladik közelítésben a következőképpen tárgyalhatjuk. Tegyük fel, hogy

1. Nincs trend, s az évi átlaghőmérsékletek egy $\bar{T}$ átlag körül ingadoznak.
2. Legyenek az éves ingadozások függetlenek egymástól.
3. Legyen az éves ingadozások eloszlásfüggvénye Gauss függvény, σ szórással.
4. Legyen $\sigma \approx 0.5^0C$. Ezt az értéket a következő becslésből kaphatjuk: A napi hőmérsékletfluktuációkat $\delta T \approx 5 - 10^0C$-nak tekinthetjük, s mivel az évi átlaghőmérséklet 365 napi átlagból adódik össze, ezért $\sigma \approx (5-10)^0C/\sqrt{365} \approx 0.5^0C$.

Világos, hogy ha a fentiekből kiindulva az $a > 0.7^0C/100$év-et kapnánk, akkor nincs értelme melegedési trendről beszélni. Az is világos, hogy a fenti problémában a átlaga $\bar{a} = 0$. Tehát a alatt a $\sqrt{\bar{a^2}}$ mennyiséget kell értenünk.

A kérdés: Mekkora $\sqrt{\bar{a^2}}$, ha $N = 100$, s mekkora, ha $N = 10$?