Véletlen folyamatok házi feladatai. 1. hét. Beadási határidő: Feb. 19, 10:00.

(1) (20pt) A véletlenről.

(a) Ismertessünk egy olyan mindennapos eseményt, amelyben a véletlen releváns, a véletlent látjuk és értjük is, s esetleg kvantifikálni is tudjuk! Mondjunk olyan példát is, ahol nem értjük a jelenség hátterében meghúzódó véletlent!

(b) Keressünk olyan véletlenszerű jelenséget környezetünkben, amelyről a Brown-mozgás típusú leírás valószínűleg jó közelítést adna! Vizsgáljuk egy vékony résen a szobába jutó napsugár által megvilágított porszemek mozgását. Brown mozgás ez? Kielégíti-e a porszemek mozgása az Einsteni 1. és 2. feltételezést?

(c) Egy, a valószínűségszámítás finomságait mutató, szórakoztató példa.
Egy férfi (nő) két barátnője (barátja) a metróvonal két végén lakik, s a férfi (nő) pedig a metróvonal egyik középső állomásánál dolgozik. A férfi (nő) munkájából véletlenszerű időpontban távozik, lemegy a metróba, [s mivel nem akar kivételezni egyik barátnőjével (barátjával) sem] felszáll az első érkező a metróra. A metrók azonos intervallumokban (mondjuk 4 percenként) követik egymást mindkét irányban. Azt gondolnánk, hogy valóban nincs kivételezés. A férfi (nő) mégis háromszor gyakrabban jut el az egyik szeretőjéhez. Miért?

(2) (20 pt) A részeg tengerész lejtős utcán τ időközönként ℓ hosszúságú lépést tesz p_+, illetve p_- valószínűséggel felfelé vagy lefelé ($p_+ + p_- = 1$). A lépések függetlenek egymástól, s a kocsma az origóban ($x_0 = 0$) van.
Határozzuk meg a $t = N\tau$ idő alatt megtett utat és az elmozdulás négyzetének átlagát, $\langle x_t \rangle$-t és $\langle x_t^2 \rangle$-t! Tegyük fel, hogy

(i) az utca lejtése nem lényeges és $p_+ = p_-$,

(ii) a tengerész súlyosabb állapotban van, s az utca lejtése relevánssá válik: $p_+ = 2p_-$.

Iránymutatás:

Legyen az $e_i = \pm 1$ valószínűségi változó az i-edik lépés iránya (+1: lefelé, -1: felfelé). Ekkor $N = t/\tau$ lépés után a tengerész elmozdulását, x_N-t, és az elmozdulás négyzetét, x_N^2-et, a következő összegek adják

$$x_N = \ell \sum_{i=1}^{N} e_i \quad , \quad x_N^2 = \ell^2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} e_i e_j \quad . \tag{1}$$

A fenti összegek átlagainak számolása során meg kell határoznunk $\langle e_i \rangle$-t, s az $\langle e_i e_j \rangle$ átlagának számolásakor ki kell használnunk, hogy a lépések (azaz az e_i változók) függetlenek egymástól.

(3) (20 pt) Vizsgáljuk a Brown mozgás előadáson tárgyalt, Einstein féle leírását.

(i) Vázlatosan rajzoljuk fel hogyan változik idővel a részecske megtalálásának valószínűségsűrűsége, $P(x,t)$! Van-e kapcsolat a függvény szélessége és magassága között?

(ii) Legyen sodródás is a rendszerben (szél fúj a víz felett). Ekkor a τ időnként megtett ugrások hosszának (Δ) valószínűségi eloszlása nem szimmetrikus $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$, s várhatóan $\overline{\Delta} = \int \Delta \Phi(\Delta) d\Delta \neq 0$.

(a) Mit várunk, hogyan fejlődik időben a részecske megtalálási valószínűsége, $P(x,t)$, ha a részecske az origóból indult!? Rajzoljunk!

(b) Írjuk fel a Chapman-Kolmogorov egyenletet, s deriváljuk a részecske megtalálási valószínűségét, $P(x,t)$-t meghatározó Fokker-Plack egyenletet! Mennyiben különbözik ez az egyenlet az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől?

(4) (20 pont)

Kétségbeesett telefon érkezik a rendőrségre. A közelben levő erdőség közepén egy család táborozott. Este 9-kor lefeküdtek, s reggel hétkor arra ébredtek, hogy 3 éves gyerekük eltűnt. Feltéve, hogy nem egy farkas, vagy egy emberrabló az eltűnés oka, határozzuk meg, hogy a rendőrség prioritása mekkora terület gyors átkutatása kell legyen!