Véletlen folyamatok házi feladatai. 1. hét. Beadási határidő: Márc.10., 12:00.

(1) (20pt) Véletlen és valóság.

(a) Próbáljunk emlékezni arra az eseményre, amivel kapcsolatban először gondoltunk véletlenszerűségre. Miért tekintettük az eseményt véletlennek, s mit gondoltunk a jelenség hátteréről?

(b) Emlékezzünk olyan, az életünkben megtörtént eseményre, amikor valahogy kiszámoltunk valószínűségeket, s ezek a valószínűségek határozták meg a tetteinket!

(c) Találjunk olyan véletlenszerű jelenséget környezetünkben, amelyre a Brown-mozgás típusú leírás jó közelítést adna! Nézzük meg a Teams honlapunk

Documents/General/Class Materials/Pictures_and_Films

dosszéjában található filmeket. Brown mozgásokat látunk? Az Einsteni feltételezések helyesek ezekben az esetekben?

(2) (20 pt) Egyszerű valószínűségszámítási példák.

Feldobott érme leesése után egyenlő valószínűséggel fej (F) vagy írás (I).

(a) Dobjuk fel az érmét kétszer. Milyen valószí nűséggel kapunk két fejet (FF), illetve írás-fej (IF) sorrendet? Ugyanaz a két valószínűség?

(b) Játsszuk a következő játékot! Addig dobálunk, amíg vagy két fej (FF - én nyerek), vagy fej-írás (FI - te nyersz) jön ki. Igazságos ez a játék?

(c) Egy, a valószínűségszámítás finomságait mutató, szórakoztató példa.
Egy férfi (... de egyéb gender változatok is lehetségesek) két barátnője (... szintén) a metróvonal két végén lakik, a férfi pedig a metróvonal egyik középső állomásánál dolgozik. A férfi munkájából véletlenszerű időpontban távozik, lemegy a metróba, [s mivel nem akar kivételezni egyik barátnőjével sem] felszáll az első érkező a metróra. A metrók azonos intervallumokban (mondjuk 5 percenként) követik egymást mindkét irányban. Azt gondolnánk, hogy valóban nincs kivételezés. A férfi mégis négyszer gyakrabban jut el az egyik szeretőjéhez. Miért?

(3) (30 pt) A részeg tengerész lejtős utcán τ időközönként ℓ hosszúságú lépést tesz p_+, illetve p_- valószínűséggel felfelé vagy lefelé ($p_+ + p_- = 1$). A lépések függetlenek egymástól, s a kocsma az origóban ($x_0 = 0$) van.
Határozzuk meg a $t = N\tau$ idő alatt megtett utat és az elmozdulás négyzetének átlagát, $\langle x_t \rangle$-t és $\langle x_t^2 \rangle$-t! Tegyük fel, hogy

(i) az utca lejtése nem lényeges és $p_+ = p_-$,

(ii) a tengerész súlyosabb állapotban van, s az utca lejtése relevánssá válik: $p_+ = 2p_-$.

Útmutatás:

Legyen az $e_i = \pm 1$ valószínűségi változó az i-edik lépés iránya (+1: lefelé, -1: felfelé). Ekkor $N = t/\tau$ lépés után a tengerész elmozdulását, x_N-t, és az elmozdulás négyzetét, x_N^2-et, a következő összegek adják

$$x_N = \ell \sum_{i=1}^{N} e_i \quad , \quad x_N^2 = \ell^2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} e_i e_j \quad . \tag{1}$$

A fenti összegek átlagainak számolása során meg kell határoznunk $\langle e_i \rangle$-t, s az $\langle e_i e_j \rangle$ átlagának számolásakor ki kell használnunk, hogy a lépések (azaz az e_i változók) függetlenek egymástól.

(4) (30 pt) Vizsgáljuk a Brown mozgás előadáson tárgyalt, Einstein féle leírását.

(ii) Vázlatosan rajzoljuk fel hogyan változik idővel a részecske megtalálásának valószínűség-sűrűsége, $P(x,t)$! Van-e kapcsolat a függvény szélessége és magassága között?

(iii) Legyen sodródás is a rendszerben (szél fúj a víz felett). Ekkor a τ időnként megtett ugrások hosszának (Δ) valószínűségi eloszlása nem szimmetrikus $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$, s várhatóan $\overline{\Delta} = \int \Delta\Phi(\Delta) d\Delta \neq 0$.

Mit várunk, hogyan fejlődik időben a részecske megtalálási valószínűsége, $P(x,t)$, ha a részecske az origóból indult!? Rajzoljunk! [Esetleg írjuk fel a Chapman-Kolmogorov egyenletet, s deriváljuk a részecske megtalálási valószínűségét, $P(x,t)$-t meghatározó Fokker-Plack egyenletet! Mennyiben különbözik ez az egyenlet az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől?]