Véletlen folyamatok házi feladatai. 1. hét. Beadási határidő: Feb. 22., 23:00.

(1) (15pt) A véletlenről.

(a) Próbáljunk emlékezni arra, amikor először kerültünk szembe olyan jelenséggel, aminek a kimenetele véletlenszerűnek tűnt. Mit gondoltunk akkor és mit gondolunk ma arról, hogy mi volt az esemény hátterében?

(2) (25pt) Valószínűségszámítás.

(a) Gyakran halljuk, hogy egy közvéleménykutató szervezet 1000 személyt megkérdezett arról, hogy az A, vagy a B pártot támogatja-e, ha ma lenne a választás. Az eredmény rendszerint valahogy így hangzik: 48% támogatja az A pártot, 52% pedig a B pártot. Utána még hozzáteszik, hogy: az eredmény pontossága 3%. Honnan ered ez a hibabecslés [Mi az a kép (a model), aminek alapján a számolás történik? Van-e kapcsolat a 3. feladat részeg tengerészével?], s hogyan változna a hibabecslés, ha 10000 embert kérdeznének meg?

(b) Egy, a valószínűségszámítás finomságait mutató, szórakoztató példa.
Egy férfi (... de egyéb gender változatok is lehetségesek) két barátnője (... szintén) a metróvonal két végén lakik, a férfi pedig a metróvonal egyik középső állomásánál dolgozik. A férfi munkájából véletlenszerű időpontban távozik, lemegy a metróba, [s mivel nem akar kivételezni egyik barátnőjével sem] felszáll az első érkező a metróra. A metrók azonos intervallumokban (mondjuk 5 percenként) követik egymást mindkét irányban. Azt gondolnánk, hogy valóban nincs kivételezés. A férfi mégis négyszer gyakrabban jut el az egyik szeretőjéhez. Miért?

(3) (30 pt) A részeg tengerész lejtős utcán τ időközönként ℓ hosszúságú lépést tesz p_+, illetve p_- valószínűséggel felfelé vagy lefelé ($p_+ + p_- = 1$). A lépések függetlenek egymástól, s a kocsma az origóban ($x_0 = 0$) van.
Határozzuk meg a $t = N\tau$ idő alatt megtett utat és az elmozdulás négyzetének átlagát, $\langle x_t \rangle$-t és $\langle x_t^2 \rangle$-t! Tegyük fel, hogy

(i) az utca lejtése nem lényeges és $p_+ = p_-$,

(ii) a tengerész súlyosabb állapotban van, s az utca lejtése relevánssá válik: $p_+ = 3p_-$.

Útmutatás:

Legyen az $e_i = \pm 1$ valószínűségi változó az i-edik lépés iránya (+1: lefelé, -1: felfelé). Ekkor $N = t/\tau$ lépés után a tengerész elmozdulását, x_N-t, és az elmozdulás négyzetét, x_N^2-et, a következő összegek adják

$$x_N = \ell \sum_{i=1}^{N} e_i \quad , \quad x_N^2 = \ell^2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} e_i e_j \quad . \tag{1}$$

A fenti összegek átlagainak számolása során meg kell határoznunk $\langle e_i \rangle$-t, s az $\langle e_i e_j \rangle$ átlagának számolásakor ki kell használnunk, hogy a lépések (azaz az e_i változók) függetlenek egymástól.

(4) (30 pt) Vizsgáljuk a Brown mozgás előadáson tárgyalt, Einstein féle leírását.

(i) Nézzük meg a https://motionarray.com/stock-video/floating-dust-particles-in-sunlight-1615246/ videót, ami a szobába jutó napsugár által megvilágított porszemek mozgását mutatja. Brown mozgás ez? Kielégíti a porszemek mozgása az Einsteni 1. és 2. feltételezést?

(ii) Vázlatosan rajzoljuk fel hogyan változik idővel a részecske megtalálásának valószínűség-sűrűsége, $P(x,t)$ a Brown mozgás esetén! Van-e kapcsolat a függvény szélessége és magassága között?

(iii) Legyen sodródás is a rendszerben (szél fúj a víz felett). Ekkor a τ időnként megtett ugrások hosszának (Δ) valószínűségi eloszlása nem szimmetrikus $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$, s várhatóan $\overline{\Delta} = \int \Delta\Phi(\Delta)d\Delta \neq 0$.

Mit várunk, hogyan fejlődik időben a részecske megtalálási valószínűsége, $P(x,t)$, ha a részecske az origóból indult!? Rajzoljunk! [Esetleg írjuk fel a Chapman-Kolmogorov egyenletet, s deriváljuk a részecske megtalálási valószínűségét, $P(x,t)$-t meghatározó Fokker-Plack egyenletet! Mennyiben különbözik ez az egyenlet az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől?]