Véletlen folyamatok házi feladatai. 1. hét. Beadási határidő: Feb. 19., 20:00.

(1) (15pt) A véletlenről.

(a) Próbáljunk emlékezni arra, amikor először kerültünk szembe olyan jelenséggel, aminek a kimenetele véletlenszerűnek tűnt. Mit gondoltunk akkor és mit gondolunk ma arról, hogy mi volt az esemény hátterében?

(2) (25pt) Valószínűségszámítás (A test of your knowledge of probability as well as of your English).

You visit your grandma on the first day of every month. To show your love for her, you bake her an apple pie each time. There are three possible outcomes:

(i) with probability 0.2 you forget you had put the pie in the oven and it gets burned;
(ii) with probability 0.6 it turns out fine (presentable and edible); and
(iii) with probability 0.2 you manage to nail it (the pie is extraordinarily delicious).

When you show up, your grandma either has no appetite (with probability 0.9) or is hungry (with probability 0.1); this is independent of the outcome of your baking experiment.

If she has no appetite, then she will only eat pie if it is extraordinarily delicious. If she is hungry, she will eat pie if it is edible (that is, it is not burned).

Questions:

(a) What is the probability that your grandma will eat pie during your next visit?

(b) What is the probability that you burn the pie more than once in the coming year (12 months)? (Assume that you never learn and so each baking experiment is independent of everything else.)

(c) What is the expected number of edible (i.e. not burned) pies that you bake in the coming year?

(3) (30 pt) A részeg tengerész lejtős utcán τ időközönként ℓ hosszúságú lépést tesz p_+, illetve p_- valószínűséggel felfelé vagy lefelé ($p_+ + p_- = 1$). A lépések függetlenek egymástól, s a kocsma az origóban ($x_0 = 0$) van.
Határozzuk meg a $t = N\tau$ idő alatt megtett utat és az elmozdulás négyzetének átlagát, $\langle x_t \rangle$-t és $\langle x_t^2 \rangle$-t! Tegyük fel, hogy
(i) az utca lejtése nem lényeges és $p_+ = p_-$,
(ii) a tengerész súlyosabb állapotban van, s az utca lejtése relevánssá válik: $p_- = 3p_+$.

Útmutatás:
Legyen az $e_i = \pm 1$ valószínűségi változó az i-edik lépés iránya (+1: lefelé, -1: felfelé). Ekkor $N = t/\tau$ lépés után a tengerész elmozdulását, x_N-t, és az elmozdulás négyzetét, x_N^2-et, a következő összegek adják

$$x_N = \ell \sum_{i=1}^{N} e_i \quad , \quad x_N^2 = \ell^2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} e_i e_j \quad . \tag{1}$$

A fenti összegek átlagainak számolása során meg kell határoznunk $\langle e_i \rangle$-t, s az $\langle e_i e_j \rangle$ átlagának számolásakor ki kell használnunk, hogy a lépések (azaz az e_i változók) függetlenek egymástól.

(4) (30 pt) Vizsgáljuk a Brown mozgás előadáson tárgyalt, Einstein féle leírását.

(i) Nézzük meg a Teams Documents/General/Films dossziében található istock.mp4 videót, ami a szobába jutó napsugár által megvilágított porszemek mozgását mutatja. Brown mozgás ez? Kielégíti a porszemek mozgása az Einsteni 1. és 2. feltételezést?

(ii) Vázlatosan rajzoljuk fel hogyan változik idővel az origóból induló részecske megtalálásának valószínűségsűrűsége, $P(x,t)$ a Brown mozgás esetén! Van-e kapcsolat a függvény szélessége és magassága között?

(iii) Legyen sodródás is a rendszerben (szél fúj a víz felett). Ekkor a τ időnként megtett ugrások hosszának (Δ) valószínűségi eloszlása nem szimmetrikus $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$, s várhatóan $\overline{\Delta} = \int \Delta\Phi(\Delta)d\Delta \neq 0$.

Mit várunk, hogyan fejlődik időben a részecske megtalálási valószínűsége, $P(x,t)$, ha a részecske az origóból indult!? Rajzoljunk! [Plusz 10 pont: Írjuk fel a Chapman-Kolmogorov egyenletet, s deriváljuk a részecske megtalálási valószínűségét, $P(x,t)$-t meghatározó Fokker-Plack egyenletet! Mennyiben különbözik ez az egyenlet az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől?]