

(1) (20pt)

Véletlen és valóság.

(a) Próbáljunk emlékezni arra az eseményre, amivel kapcsolatban először gondoltunk véletlenszerűsége. Miért tekintettük az eseményt véletlennek, s mit gondoltunk a jelenség háttéréről?

(b) Emlékezzünk olyan, az életünkben megtörtént eseményre, amikor kiszámoltunk valószínűségeket (az adott ismereteinkből kiindulva), s ezek a valószínűségek határozták meg a tetteinket!

(2) (40 pt)

A Brown mozgás diszkrét változata.

A részeg tengerész kilép a kocsmából, s a lejtős utcán τ időközönként ℓ hosszúságú lépést tesz p_+ , illetve p_- valószínűséggel felfelé vagy lefelé ($p_+ + p_- = 1$). A lépések függetlenek egymástól, s a kocsmában az origóban ($x_0 = 0$) van.

Határozzuk meg a $t = N\tau$ idő alatt megtett utat és az elmozdulás négyzetének átlagát, $\langle x_t \rangle$ -t és $\langle x_t^2 \rangle$ -t! Tegyük fel, hogy

(i) az utca lejtése nem lényeges és $p_+ = p_- = 1/2$,

(ii) (Nem kötelező, de érdemes kiszámolni) a tengerész súlyosabb állapotban van, s az utca lejtése relevánssá válik: $p_+ = 2p_-$.

Útmutatás:

Legyen az $e_i = \pm 1$ valószínűségi változó az i -edik lépés iránya (+1: lefelé, -1: felfelé). Ekkor $N = t/\tau$ lépés után a tengerész elmozdulását, x_N -t, és az elmozdulás négyzetét, x_N^2 -et, a következő összegek adják

$$x_N = \ell \sum_{i=1}^N e_i \quad , \quad x_N^2 = \ell^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i e_j \quad . \quad (1)$$

A fenti összegek átlagainak ($\langle x_N \rangle$, $\langle x_N^2 \rangle$) számolása során meg kell határozni $\langle e_i \rangle$ -t, s az $\langle e_i e_j \rangle$ átlagának számolásakor ki kell használnunk, hogy $i \neq j$ esetén a lépések (azaz az e_i változók) függetlenek egymástól.

(3) (40 pt)

Atomok száma.

Johann Magnenus német szerzetes hitt Démokritosz tanaiban, amely szerint mindent atomok építenek fel, s megpróbálta megbecsülni az atomok számát. Kísérleteiről azt tudni, hogy egy nagy épület (katedrális?) egyik végében elégetett egy borsószemnél is kisebb tömjént, s azt vizsgálta, hogy az épület másik végében érezni-e a tömjén füstjét. Végül is arra a (hibaszámolással nem alátámasztott pontosságú) következtetésre jutott, hogy az elégetett tömjén atomjainak száma $7.7763 \cdot 10^{17}$. Próbáljuk megérteni Magnenus kísérletét és mi is becsüljük meg az elégetett tömjén atomjainak számát! Mekkora lehetett az elégetett tömjén? Az épület mérete? Figyelem, a szaglás mechanizmusáról is kell, hogy legyen valami elképzelésünk!