Véletlen folyamatok házi feladatai. 3. hét. Beadási határidő: Márc. 10., 12:20.

(1)

Tegyük fel, hogy a kolloidrészecskék diffúziós együtthatójára kapott kifejezés extrapolálható molekuláris szintre. Milyen értéket kapunk egy nem túlságosan nagy molekulekula vízben történő termális mozgásának diffúziós együtthatójára? Keressünk nagy (biológiai) molekulákat, amelyekre a diffúziós együttható ismert, s hasonlítsuk össze értéküket a becsült eredménnyel! Határozzuk meg pl. a felgombolyodott emberi DNS diffúziós együtthatóját!

(2)

Határozzuk meg, hogy egy szobahőmérsékleten levő, ideálisnak tekinthető gázban mennyi idő alatt jut el egy O_2 molekula a szoba egyik végéből a másikba tisztán diffúziv mozgással.

Segítség:

A kinetikus elmélet a gázok diffúziós együtthatójára a következő kifejezést adja (és az eredményt érthetjük is a Brown mozgásról tanultak alapján):

$$D = \frac{1}{3}\mu\overline{v} \qquad \left(= \frac{\mu^2}{3\mu/\overline{v}} \approx \frac{(\Delta x)^2}{2\tau} \right),$$

ahol μ a molekulák szabad úthossza, $\overline{v}$ pedig átlagos sebességük. A szabad úthosszt megbecsülhetjük a $\mu = 1/(n\pi d^2)$ kifejezésből, ahol n a molekulák koncentrációja és d a molekulák átmérője. Az átlagos sebességet pedig az ekvipartíció tételéből számolhatjuk.

A valóságban a szagok sokkal gyorsabban terjednek egy szobában, annak ellenére, hogy a megfelelő molekulák lényegesen nagyobbak és súlyosabbak az O_2 molekulánál. Értjük ezt?

(3)

Írjuk fel az osztály hétről-hétre változó létszámát meghatározó master egyenletet. Gondolkozzunk el azon, hogy mi határozza meg az átmeneti rátákat!

(4)

Egy m tömegű részecske a rácsállandójú, egydimenziós rácson τ időközönként valamelyik szomszédos rácspontba ugrik. A részecske az origóhoz van kötve egy rugalmas, tömeg nélküli gumiszállal, amelynek rugóállandója k, s a környezet hőmérséklete T.

(a) Írjuk fel a részecske stochasztikus mozgását leíró master egyenletet!

(b) Használjuk a részletes egyensúly elvét konkrét, egyensúlyhoz vezető átmeneti ráták meghatározására!

(5)

Nem kötelező, bármikor beadható az év folyamán. Azoknak írtam ki, akik szeretik a valószínűségszámítást, s hisznek abban, hogy a látszólag lehetetlent is meg lehet oldani (az évvégi jóindulatú kerekítéseknél figyelembe veszem a megoldást).

Prisoner A is brought into the wardens room and shown a faceup deck of 52 cards, lined up in a row in arbitrary order. He is given the opportunity to interchange two cards, after which he leaves the room. The cards are then turned face down, in place. Prisoner B is brought into the room. The warden thinks of a card, and then tells it to B (for example, the three of clubs).

Prisoner B then is allowed to turn over 26 cards, one at a time. If the named card is among those turned over, the prisoners are freed immediately (If they fail, they must spend the rest of their lives in prison). Find a strategy that guarantees that the prisoners succeed.

The two prisoners have the game described to them the day before and are allowed to work out a strategy; absolutely no communication between them is allowed on the day of the game. Notice that at no time does Prisoner A know the chosen card.