

Véletlen folyamatok házi feladatai. 3. hét. Beadási határidő: Márc. 4., 10:00.

(1) (15) Egy jóindulatú, de feledékeny tanár osztályzásának hibabecslése.

A tanár 10 héten keresztül hetente kiad 4 megoldandó házi feladatot. Egy feladat megoldásáért maximum 20 pontot lehet kapni, de átlagosan a diákok csak 15 pontot érnek el, tehát az év végén az átlagos összpontszám 600 lesz. Egy feladat javítása során adott hibák elkövetéséért X pont kerül levonásra, de a tanár feledékeny, s ugyanazon hibákért a következő dolgozatban nem X , hanem $X+1$, vagy $X-1$ pontot von le (egyenő valószínűséggel, mert a tanár nem kivételez). Ez természetesen mélységesen igazságtalan! A kérdés az, hogy el kell-e menni a dékánhoz panaszkodni? A kérdés megválaszolásához számítsuk ki, hogy az év végi átlagos összpontszámnak mekkora lesz az igazságtalanságból következő szórása!

(2) (20)

Egy gonosz manó az előadóterem végében kinyit egy koronavírusokkal teli kémcsövet. A kérdés az, hogy az első sorokban ülőknek milyen gyorsan kell elhagyniuk a termet ahhoz, hogy elkerüljék a fertőzést.

i) Nem a legjobb becslés: Határozzuk meg, hogy egy szobahőmérsékleten levő, ideálisnak tekinthető gázban a koronavírus mennyi idő alatt jut el a szoba egyik végéből a másikba tisztán diffúzív mozgással, feltételezve, hogy a koronavírus egy nagy molekulának tekinthető.

Iránymutatás:

A kinetikus elmélet a gázok diffúziós együtthatójára a következő kifejezést adja a molekulák szabad úthosszán (ℓ) és az átlagos sebességükön ($\bar{v}$) keresztül [és az eredményt érthetjük is a Brown mozgásról tanultak alapján]:

$$D = \frac{1}{3} \ell \bar{v} \quad \left[\frac{1}{3} \ell \bar{v} = \frac{\ell^2}{3 \ell / \bar{v}} \approx \frac{(\text{length of jumps})^2}{3 (\text{time between jumps})} \approx \frac{(\Delta x)^2}{2\tau} = D \quad (\text{ld. Einstein!}) \right].$$

A szabad úthosszt megbecsülhetjük az $\ell = 1/(n\pi d^2)$ kifejezésből, ahol n a gáz részecskeszám koncentrációja és d a vírus átmérője [a becslés gondolata: a szabad mozgás során a vírus által súrolt térfogatban ($\ell\pi d^2$) egy gáz molekula található – a számoláshoz meg kell keresnünk a koronavírus átmérőjét]. Az átlagos sebességet pedig az ekvipartíció tételéből számolhatjuk – ehhez pedig ismernünk kell a koronavírus tömegét.

Reális eredményt kaptunk? Gondoljunk például a szagok gyors terjedésére.

ii) Reálisabb eredményt kapunk, ha azt feltételezzük, hogy a szobában mindig jelenlevő konvekciós légáramok viszik a vírusokat. A számoláshoz becsljük meg a konvekciós légmozgás sebességét a porszemek mozgásából, amit a egy szobában a beszűrődő napfényben láthatunk.

(3) (25)

Egy részecske, amelynek tömege m , egydimenziós rácson ugrál úgy, hogy τ időközönként valamelyik szomszédos rácspontba ugrik (a rácsállandó a). A részecske az origóhoz van kötve egy rugalmas, tömeg nélküli gumiszállal, amelynek rugóállandója k , s a környezet hőmérséklete T .

(i) Írjuk fel a részecske stochasztikus mozgását leíró master egyenletet!

(ii) Használjuk a részletes egyensúly elvét konkrét, egyensúlyhoz vezető átmeneti ráták meghatározására!

(4) (20)

Meredek hegyoldalban függőlegesen ℓ távolságra vannak a kapaszkodók. A hegymászó w rátával lép felfelé, s w_0 annak a rátája, hogy lecsúszik egy szintet, s onnan folytatja a mászást.

Feladatok:

- (i) Irjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymászó milyen P_n valószínűséggel van $n\ell$ magasságban!
- (ii) Egyelőre nem kell megtalálni az egyenlet megoldását, de azon elgondolkodhatunk, hogy ha van egy stacionárius megoldás, akkor abban az állapotban teljesül-e a részletes egyensúly elve. Teljesül?
- (iii) Látunk-e valami hasonlóságot a T hőmérsékletű hőtartályban levő kvantum oszcillátorral?