

Véletlen folyamatok házi feladatai. 3. hét. Beadási határidő: Márc. 6., 20:00.

(1) (30)

Határozzuk meg, hogy egy szobahőmérsékleten levő, ideálisnak tekinthető gázban mennyi idő alatt jut el a záptojásszagot okozó H_2S molekula a szoba egyik végéből a másikba tisztán diffúzióval.

Segítség:

A kinetikus elmélet a gázok diffúziós együtthatójára a következő kifejezést adja a molekulák szabad úthosszán (ℓ) és az átlagos sebességükön (\bar{v}) keresztül [és az eredményt érthetjük is a Brown mozgásról tanultak alapján]:

$$D = \frac{1}{3} \ell \bar{v} \quad \left[\frac{1}{3} \ell \bar{v} = \frac{\ell^2}{3 \ell / \bar{v}} \approx \frac{(\text{length of jumps})^2}{3 (\text{time between jumps})} \approx \frac{(\Delta x)^2}{2\tau} \quad (\text{ld. Einstein!}) \right].$$

A szabad úthosszt megbecsülhetjük az $\ell = 1/(n\pi d^2)$ kifejezésből, ahol n a molekulák részecskeszám koncentrációja és d a molekulák átmérője [a becslés gondolata: a szabad mozgás során a molekula által súrolt térfogatban ($\ell\pi d^2$) egy másik molekula található]. Az átlagos sebességet pedig az ekvipartíció tételéből számolhatjuk.

ii) Jobb becslést kapunk, ha azt feltételezzük, hogy a szobában mindig jelenlevő konvekciós légáramok viszik a molekulákat. A számoláshoz becsljük meg a konvekciós légmozgás sebességét a porszemek mozgásából, amit egy szobában a beszűrődő napfényben láthatunk.

(2) (30)

Meredek hegyoldalon függőlegesen ℓ távolságra vannak a kapaszkodók. A hegymászó w rátával lép felfelé, s w_0 annak a rátája, hogy lecsúszik egy szintet, s onnan folytatja a mászást.

Feladatok:

(i) Irjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymászó milyen P_n valószínűséggel van $n\ell$ magasságban!

(ii) Egyelőre nem kell megtalálni az egyenlet megoldását, de azon elgondolkodhatunk, hogy ha van egy stacionárius megoldás, akkor abban az állapotban teljesül-e a részletes egyensúly elve. Teljesül?

(3) (40)

Egy részecske, amelynek tömege m , egydimenziós rácson ugrál úgy, hogy τ időközönként valamelyik szomszédos rácspontba ugrik (a rácsállandó a). A részecske az origóhoz van kötve egy rugalmas, tömeg nélküli gumiszállal, amelynek rugóállandója k , s a környezet hőmérséklete T .

(i) Írjuk fel a részecske stochasztikus mozgását leíró master egyenletet!

(ii) Használjuk a részletes egyensúly elvét konkrét, egyensúlyhoz vezető átmeneti ráták meghatározására!