

## Véletlen folyamatok házi feladatai. 3. hét. Beadási határidő: Márc. 5., 8 PM.

(1) (20) Egy jóindulatú, de feledékeny tanár osztályzásának hibabecslése.

A tanár 10 héten keresztül hetente kiad 4 megoldandó házi feladatot. Egy feladat megoldásáért maximum 20 pontot lehet kapni, de átlagosan a diákok csak 15 pontot érnek el, tehát az év végén az átlagos összpontszám 600 lesz. Egy feladat javítása során adott hibák elkövetéséért  $X$  pont kerül levonásra, de a tanár feledékeny, s ugyanazon hibákért a következő dolgozatban nem  $X$ , hanem  $X+1$ , vagy  $X-1$  pontot von le (egyenő valószínűséggel, mert a tanár nem kivételez). Ez természetesen mélységesen igazságtalan! A kérdés az, hogy el kell-e menni a dékánhoz panaszkodni? A kérdés megválaszolásához számítsuk ki, hogy az év végi átlagos összpontszámunk mekkora lesz az igazságtalanságból következő szórása!

(2) (30)

Egy gonosz manó az előadóterem végében kinyit egy koronavírusokkal teli kémcsövet. A kérdés az, hogy az első sorokban ülőknek milyen gyorsan kell elhagyniok a termet ahhoz, hogy elkerüljék a fertőzést.

i) Nem a legjobb becslés: Határozzuk meg, hogy egy szobahőmérsékleten levő, ideálisnak tekinthető gázban a koronavírus mennyi idő alatt jut el a szoba egyik végéből a másikba tisztán diffúzióval, feltételezve, hogy a koronavírus egy nagy molekulának tekinthető.

Iránymutatás:

A kinetikus elmélet a gázok diffúziós együtthatójára a következő kifejezést adja a molekulák szabad úthosszán ( $\ell$ ) és az átlagos sebességükön ( $\bar{v}$ ) keresztül [és az eredményt érthetjük is a Brown mozgásról tanultak alapján]:

$$D = \frac{1}{3} \ell \bar{v} \quad \left[ \frac{1}{3} \ell \bar{v} = \frac{\ell^2}{3 \ell / \bar{v}} \approx \frac{(\text{length of jumps})^2}{3 (\text{time between jumps})} \approx \frac{(\Delta x)^2}{2\tau} = D \quad (\text{ld. Einstein!}) \right].$$

A szabad úthosszt megbecsülhetjük az  $\ell = 1/(n\pi d^2)$  kifejezésből, ahol  $n$  a gáz részecskeszám koncentrációja és  $d$  a vírus átmérője [a becslés gondolata: a szabad mozgás során a vírus által súrolt térfogatban ( $\ell\pi d^2$ ) egy gáz molekula található – a számoláshoz meg kell keresnünk a koronavírus átmérőjét]. Az átlagos sebességet pedig az ekvipartíció tételéből számolhatjuk – ehhez pedig ismernünk kell a koronavírus tömegét.

Reális eredményt kaptunk? Gondoljunk például a szagok gyors terjedésére.

ii) Reálisabb eredményt kapunk, ha azt feltételezzük, hogy a szobában mindig jelenlevő konvekciós légáramok viszik a vírusokat. A számoláshoz becsüljük meg a konvekciós légmozgás sebességét a porszemek mozgásából, amit a egy szobában a beszűrődő napfényben láthatunk.

(3) (20)

Gondolkodjunk egy, a környezetünkben végbemenő véletlenszerűnek tűnő folyamaton, s írjuk fel a folyamat master egyenletét!

(4) (30)

Egy részecske, amelynek tömege  $m$ , egydimenziós rácson ugrál úgy, hogy  $\tau$  időközönként valamelyik szomszédos rácspontba ugrik (a rácsállandó  $a$ ). A részecske az origóhoz van

kötve egy rugalmas, tömeg nélküli gumiszállal, amelynek rugóállandója  $k$ , s a környezet hőmérséklete  $T$ .

(i) Írjuk fel a részecske stochasztikus mozgását leíró master egyenletet!

(ii) Használjuk a részletes egyensúly elvét konkrét, egyensúlyhoz vezető átmeneti ráták meghatározására!