Véletlen folyamatok HF. 5. hét. Beadási határidő: márc. 18., 10:00.

(1) (20 pont)

Egy járvány során az ember a következő állapotokban lehet: egészséges (e), fertőzött (f), immunis (i), halott (h). Írjuk fel a master egyenletet, amely leírja az $e \to f$, $f \to i$ és $f \to h$ dinamikát, s vegyük figyelembe, hogy immunissá nem csak az $f \to i$ folyamat eredményeképp válhat az ember, hanem azért is, mert az egészséges embert beoltják, tehát $e \to i$. A médiából elérhető adatokból becsüljük meg az átmeneti rátákat, majd határozzuk meg, hogy elhúzódó járvány esetén hány halott lesz!

Figyelem: Mivel erősen korrelált, külső erők által befolyásolt rendszerről van szó, ezért bármilyen eredményt kapunk, annak relevanciáját megfelelő perspektívából kell szemlélni! Semmi esetre se közöljük a médiával, a rémhírterjesztést büntetik.

(2) (20 pont)

Vizsgáljuk az előadáson tárgyalt 2 Ising spinből álló rendszer relaxációjának problémáját! Az előadáson megkaptuk a rendszer dinamikai mátrixát, s meghatároztuk a sajátvektorokat és a megfelelő sajátértékeket (A számolás megtalálható a kurzus honlapján "Ising spinek dinamikája" cím alatt is).

(i) Ismerve az összes sajátvektort és sajátértéket, határozzuk meg milyen valószínűséggel van a rendszer t időpontban az $s_1 = +1$, $s_2 = +1$ állapotban, ha a kezdeti állapot $s_1 = -1$, $s_2 = -1$ volt.

(ii) Számítsuk ki a rendszer átlagos mágnesezettségének $[M(t) = \langle (s_1 + s_2) \rangle]$ időfejlődését, ha kezdetben spinek 1/2 valószínűséggel az $s_1 = +1$, $s_2 = +1$, illetve az $s_1 = +1$, $s_2 = -1$ állapotban vannak.

(3) (20 pont)

Meredek hegyoldalban függőlegesen ℓ távolságra vannak a kapaszkodók. A hegymászó w rátával lép felfelé, s w_0 annak a rátája, hogy lecsúszik egy szintet, s onnan folytatja a mászást.

Feladatok:

(i) Irjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymászó milyen P_n valószínűséggel van $n\ell$ magasságban!

(ii) Használjuk a generátorfüggvény formalizmust annak kiszámítására, hogy nagyon sok próbálkozás átlagaként milyen magasra jut a hegymászó!

(iii) Van itt hasonlóság a sorbanállás problémájával?

(4) (20 pont)

Legyen egy egész értékeket felvevő stochasztikus változó, n, momentum-generátor függvénye $G(s)$. A normalizációból következik, hogy $G(0) = 1$, s n momentumai G deriváltjain keresztül kifejezhetők:

$$\langle n \rangle = - \left. \frac{dG(s)}{ds} \right|_{s=0} \quad , \ldots, \quad \langle n^k \rangle = (-1)^k \left. \frac{d^k G(s)}{ds^k} \right|_{s=0} . \tag{1}$$

A kumuláns generátor függvény a momentum-generátor függvény logaritmusa,

$$\Phi(s) = \ln G(s) \ , \tag{2}$$

s a kumulánsokat a következőképpen kapjuk:

$$\langle \kappa_1 \rangle = - \left. \frac{d\Phi(s)}{ds} \right|_{s=0} \quad , \ldots, \quad \langle \kappa_k \rangle = (-1)^k \left. \frac{d^k \Phi(s)}{ds^k} \right|_{s=0} \quad . \tag{3}$$

Az első kumulánsokat könnyű kiszámolni, s egyszerű értelmük van

$$\langle \kappa_1 \rangle = \langle n \rangle \quad , \quad \langle \kappa_2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \quad . \tag{4}$$

Feladatok:

(i) Határozzuk meg a kumulánsgeneráló függvényt az előadáson tárgyalt sorbanállási problémára, s számítsuk ki az első két kumulánst! Vegyük észre, hogy az átlagos sorhossz és annak szórása lényegesen egyszerűbben kapható meg így, mint ha a momentumgeneráló függvényen keresztül számoltuk volna.

(ii) Számítsuk ki a 3. kumulánst (κ_3) a momentumokon keresztül! Mi lesz κ_3 értéke, ha n eloszlásfüggvénye szimmetrikus ($P_n = P_{-n}$)?