Véletlen folyamatok házi feladatai. 5. hét. Beadási határidő: Márc. 19., 8PM.

(1) (20 pont)

Az atomreaktorokban keletkező, erősen sugárzó hulladékok tárolására a geológiailag stabil, gránit alapú ősmasszívumokat tekintik alkalmasak. Finnországban most épül egy ilyen, kb. 500 m mélybe menő barlangrendszer (see https://www.posiva.fi/en/index/finaldisposal/researchandfinaldisposalfacilitiesatonkalo.html), amelybe kb. 100 éven keresztül tervezik felhalmozni a hulladékot, ami után az egészet betemetik. Tegyük fel, hogy a terület geológiailag valóban stabil, s a rádioaktív magok csak a gräniton keresztül történő diffúzión keresztül tudnak a felszínre jutni. Keressük ki gránit diffúziós együtthatóját nagyobb rendszámú atomokra és számítsuk ki, hogy mennyi idő elteltével fogunk rádioaktivitást észlelni a barlang felett a felszínen!

(2) (30 pont) Egy példa, ahol a dinamikai mátrix diagonalizálása szükséges.

Csön-csön gyűrűt játszanak hárman. A gyűrűt a körben álló játékosok az óramutató járásával egy irányban adják tovább. Az 1-es gyereknél indul a gyűrű, s a továbbadási ráta $w = 3/\text{perc}$.

(i) Írjuk fel az egyenletet annak a valószínűségére, hogy a gyűrű az i-edik gyereknél van!

(ii) Határozzuk meg a stacionáris megoldást!

(iii) Mi lesz annak a valószínűsége, hogy 5 perc múlva a gyűrű a harmadik gyereknél található!

(iv) Határozzuk meg rendszer relaxációs idejét (először próbáljuk megbecsülni az értékét)! Mekkora lesz a különbség a megtalálási valószínűségek között a relaxációs idő elteltével?

(3) (20 pont) Itt a sorbanállási probléma álruhában.

Meredek hegyoldalban függőlegesen ℓ távolságra vannak a kapaszkodók. A hegymászó w rátával lép felfelé, s w_0 annak a rátája, hogy lecsúszik egy szintet, s onnan folytatja a mászást.

Feladatok:

(i) Irjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymászó milyen P_n valószínűséggel van $n\ell$ magasságban!

(ii) Használjuk a generátorfüggvény formalizmust annak kiszámítására, hogy nagyon sok próbálkozás átlagaként milyen magasra jut a hegymászó!

(iii) Van itt hasonlóság a sorbanállás problémájával?

(3) (30 pont) Egy példa arra, hogy egyszerű elképzelések nem mindig működnek.

Hosszú láncmolekulák (pl. a műanyagzacskók anyagában) ismétlődő egységekből, monomérekből épülnek fel, amint ez a Fig.1-en látható.

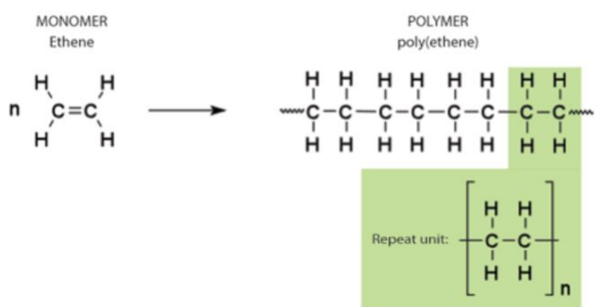

FIG. 1: Hosszú láncmolekula (Polymer) építőkockáinak (monomerek) beépülése a lánc valamelyik végén.

Tegyük fel, hogy egy adott sűrűségű és hőmérsékletű oldatban a monomérek beépülésének rátája w_+, a monomérek leszakadásának rátája pedig w_-. Határozzuk meg a láncmulekulák monomér egységekben mért átlagos hosszát!

Az adott rendszerben a mérések azt mutatják, hogy a láncok átlagos hossza $\langle n\rangle \approx 100000$ és a hossz szórása $\sigma \approx 10000$. Leírható ez a rendszer a fenti modellel?