Véletlen folyamatok házi feladatai. **5. hét.** **Beadási határidő: Márc. 16., 9PM**

(1) (30 pont) Reaktorhulladékok tárolása

Az atomreaktorokban keletkező, erősen sugárzó hulladékok tárolására a geológiailag stabil, gránit alapú ősmasszívumokat tekintik alkalmasnak. Finnországban most épül egy 450 m mélybe menő barlangrandszer,

https://www.posiva.fi/en/index/finaldisposal/researchandfinaldisposalfacilitiesatonkalo.html,

amelybe kb. 100 éven keresztül tervezik felhalmozni a hulladékot, ami után az egészet betemetik. Tegyük fel, hogy a terület geológiailag valóban stabil, s a rádioaktív magok csak a gránitona keresztül történő diffúzión keresztül tudnak a felszínre jutni. Keressük ki nagyobb rendszámú atomok diffúziós együtthatóját gránitban (pl. az U^{233} izotópra) és számítsuk ki, hogy mennyi idő elteltével fogunk rádioaktivitást észlelni a barlang felett a felszínen!

(2) (40 pont) Egy példa arra, hogy egyszerű elképzelések nem mindig működnek.

Hosszú láncmolekulák (pl. a műanyagzacskók anyagában) ismétlődő egységekből, monomérekből épülnek fel, amint ez a Fig.1-en látható.

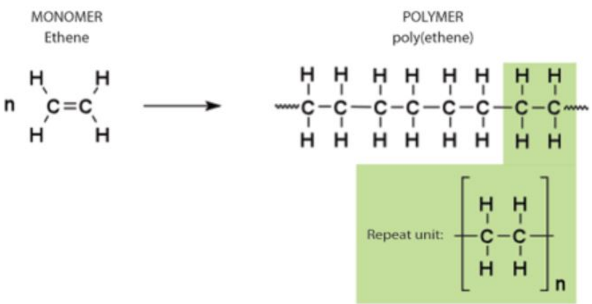

FIG. 1: Hosszú láncmolekula (Polymer) építőkockáinak (monomerek) beépülése a lánc valamelyik végén.

Tegyük fel, hogy egy adott sűrűségű és hőmérsékletű oldatban a monomérek beépülésének rátája w_+, a monomérek leszakadásának rátája pedig w_-. Határozzuk meg a láncmulekulák monomér egységekben mért átlagos hosszát!

Az adott rendszerben a mérések azt mutatják, hogy a láncok átlagos hossza $\langle n\rangle \approx 100000$ és a hossz szórása $\sigma \approx 10000$. Leírható ez a rendszer a fenti modellel?

(3) (30 pont) Kumuláns-generátor függvény

Legyen egy egész értékeket felvevő stochasztikus változó, n, momentum-generátor függvénye $G(s)$ (5. előadás). A normalizációból következik $G(0) = 1$, s n momentumai G deriváltjain keresztül kifejezhetők:

$$\langle n\rangle = -\left.\frac{dG(s)}{ds}\right|_{s=0} \quad ,..., \quad \langle n^k\rangle = (-1)^k \left.\frac{d^kG(s)}{ds^k}\right|_{s=0} \quad . \tag{1}$$

A kumuláns-generátor függvény a momentum-generátor függvény logaritmusa,

$$\Phi(s) = \ln G(s) \ , \tag{2}$$

s a kumulánsokat a következőképpen kapjuk:

$$\langle \kappa_1\rangle = -\left.\frac{d\Phi(s)}{ds}\right|_{s=0} \quad ,..., \quad \langle \kappa_k\rangle = (-1)^k \left.\frac{d^k\Phi(s)}{ds^k}\right|_{s=0} \quad . \tag{3}$$

Az első kumulánsokat könnyű kiszámolni, s egyszerű értelmük van

$$\langle \kappa_1\rangle = \langle n\rangle \quad , \quad \langle \kappa_2\rangle = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 \quad . \tag{4}$$

Feladatok:

(i) Határozzuk meg a kumuláns-generáló függvényt az előadáson tárgyalt sorbanállási problémára, s számítsuk ki az első két kumulánst! Vegyük észre, hogy az átlagos sorhossz és annak szórása lényegesen egyszerűbben kapható meg így, mint ha a momentumgeneráló függvényen keresztül számoltuk volna.

(ii) Számítsuk ki a 3. kumulánst (κ_3) a momentumokon keresztül! Mi lesz κ_3 értéke, ha n eloszlásfüggvénye szimmetrikus ($P_n = P_{-n}$)?