Véletlen folyamatok házi feladatai. 6. hét. Beadási határidő: márc. 25., 10:00.

(1) (30 pont)

Csön-csön gyűrűt játszanak hárman. A gyűrűt a körben álló játékosok az óramutató járásával egy irányban adják tovább. Az 1-es gyereknél indul a gyűrű, s a továbbadási ráta $w = 3/\text{perc}$.

(i) Írjuk fel az egyenletet annak a valószínűségére, hogy a gyűrű az i-edik gyereknél van!

(ii) Határozzuk meg a stacionáris megoldást!

(iii) Mi lesz annak a valószínűsége, hogy 5 perc múlva a gyűrű a harmadik gyereknél található! Emlékezzünk a 2-spin számolásra (5. hét, 2. feladat): Hogyan számoltuk egy állapot valószínűségét adott kezdeti feltétel mellett?

(iv) Határozzuk meg rendszer relaxációs idejét (először próbáljuk megbecsülni az értékét)! Mekkora lesz a különbség a megtalálási valószínűségek között a relaxációs idő elteltével?

(2) (60 pont)

Végezzünk szimulácókat az egy-dimenziós Ising modell egyensúlyi tulajdonságainak meghatározására. A rendszer állapotát egydimenziós rács pontjaiban ($i = 1, 2, ..., N$) ülő $s_i = \pm 1$ spinek határozzák meg. A spinek szomszédjaikkal antiferromágnesesen hatnak kölcsön [$E(s_i, s_{i+1}) = Js_is_{i+1}$, $J > 0$] azaz a szomszédos spinek szeretnek ellenkező irányban állni. Így egy $(s_1, s_2, ..., s_N)$ állapot energiája a következőképpen írható

$$E(s_1, s_2, ..., s_N) = J \sum_{1}^{N-1} s_i s_{i+1} \quad , \quad J > 0 \,. \tag{1}$$

A spinek T hőmérsékletű környezettel vannak kölcsönhatásban, s ennek eredményeképpen átbillenhetnek egyik állapotukból a másikba ($s_i \leftrightarrow -s_i$).

Válasszunk spin-flip rátának olyan alakot, ami kielégíti a részletes egyensúly elvét. Ilyen lesz például, ha az i-edik spin forgatásának ($s_i \to -s_i$) rátája a következő ($1/s$ egységben):

$$w_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_N) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \Delta E < 0 \\ 1/2 & \text{if} \quad \Delta E = 0 \\ \exp\left(-\beta \Delta E\right) & \text{if} \quad \Delta E > 0 \end{cases} \tag{2}$$

ahol, mint könnyen belátható

$$\Delta E = -2Js_i(s_{i-1} + s_{i+1}) \,. \tag{3}$$

Legyen $N = 100$, s kezdjük a rendszer szimulálását teljesen véletlenszerű állapotból, ahol $1/2$ valószínűséggel $s_i = \pm 1$ (az egyensúlyi átlagok nem függhetnek a kezdeti feltételtől, tehát eredményeink helyességét ellenőrizhetjük azzal, hogy teljesen rendezett állapotból indítjuk a rendszert, s megnézzük ugyanazt kapjuk-e).

A szimulálás a következő lépésekből áll.

1. Véletlenszerűen kiválasztunk egy spint.

2. Megnézzük, hogy ha megforgatjuk, akkor mennyit vátozik a rendszer energiája, azaz kiszámítjuk ΔE-t.

3. Ha $\Delta E < 0$, akkor megforgatjuk a spint, s megyünk az (1)-es ponthoz.

4. Ha $\Delta E = 0$, akkor húzunk egy véletlen számot P-t a $[0, 1]$ intervallumból, s ha $P < 1/2$, akkor megforgatjuk a spint, s megyünk az (1)-es ponthoz. Ha $P > 1/2$, akkor forgatás nélkül megyünk az (1)-es ponthoz.

5. Ha $\Delta E > 0$, akkor húzunk egy véletlen számot P-t a $[0, 1]$ intervallumból, s ha $P < \exp(-\beta\Delta E)$, akkor megforgatjuk a spint, egyébként megyünk az (1)-es ponthoz.

Az (1)-(5) pontokat sokszor, $N * t$-szer elvégezve azt mondjuk, hogy t idő telt el. Minden rendszernek van általában egy relaxációs ideje, τ, s ha $t > \tau$, akkor a rendszer elérkezik az egyensúlyba, s attól kezdve a különböző mennyiségek, mint például a mágnesezettség

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i \,, \tag{4}$$

vagy a mágnesezettség fluktuációja m^2, az egyensúlyi értéke körül fluktuál. Az egyensúlyi átlagokat ($\langle m\rangle, \langle m^2\rangle$) tehát megbecsülhetjük mint időátlagokat. Ez azt jelenti, hogy t_1 időnként kiszámítjuk (megmérjük) az m és az m^2 értékét, majd elég sok ilyen mérésből átlagokat számolunk, s ezek megadják a T hőmérsékleti termodinamikai átlagokat, $\langle m\rangle$-t és $\langle m^2\rangle$-t.

Határozzuk meg az $\langle m\rangle$ és az $\langle m^2\rangle$ egyensúlyi átlagokat az alábbiakban megadott egyéni βJ értékeknek megfelelő hőmérsékleteken. Próbáljuk megmagyarázni az eredményt!

$\beta J =$	0.10, 0.25, 0.50, 1.50	Albert Andrea
	0.12, 0.26, 0.53, 1.06	Bakó Bence
	0.14, 0.28, 0.56, 1.12	Borkovits Bendegúz
	0.15, 0.30, 0.60, 1.20	Bódy Lőrinc
	0.18, 0.32, 0.64, 1.28	Dajka Bence
	0.20, 0.36, 0.72, 1.40	Fejes Milán
	0.05, 0.11, 0.40, 0.80	Fodor Dániel
	0.08, 0.16, 0.32, 0.66	Godó Dániel
	0.10, 0.20, 0.60, 1.15	Klement Balázs
	0.23, 0.46, 0.90, 2.00	Méhes Máté
	0.08, 0.20, 0.45, 0.85	Míg András
	0.21, 0.50, 1.10, 1.50	Misur Patrícia
	0.15, 0.31, 0.62, 1.30	Papp János
	0.12, 0.24, 0.75, 1.60	Papp Krisztina
	0.25, 0.50, 0.70, 1.45	Sándor Szende
	0.09, 0.18, 0.50, 0.95	Szénási Attila
	0.08, 0.21, 0.40, 0.85	Márkusz István
	0.20, 0.43, 0.71, 1.50	Vass Máté