Véletlen folyamatok házi feladatai. 6. hét. Beadási határidő: Márc. 26., 8PM

(1) (30)

Lokalizált mágneses momentum (μ) z-tengely irányú B mágneses térben van. A mágneses momentum (μ) a tér irányában $\pm\mu_B$ értéket vehet fel, s ezekben az állapotokban energiája $\mp\mu_B B$. A mágneses momentum T hőmérsékletű környezettel van egyensúlyban, s kölcsönhatás eredményeképpen μ billeg a $-\mu_B$ és $+\mu_B$ állapotok között ($-\mu_B \leftrightarrow +\mu_B$).

(i) Írjuk fel a folyamat master egyenletét!

(ii) Válasszunk olyan átmeneti rátákat, amelyek kielégítik a részletes egyensúly elvét!

(iii) Határozzuk meg az átlagos mágneses momentum $\langle\mu(t)\rangle$ időfejlődését, ha kezdetben ($t = 0$) a mágneses momentum a z-tengely negatív irányába mutatott.

(2) (30)

Meredek hegyoldalban függőlegesen ℓ távolságra vannak a kapaszkodók. A hegymászó w rátával lép felfelé, s w_0 annak a rátája, hogy visszacsúszik az $n\ell = 0$ szintre, s onnan folytatja a mászást [ez a probléma példája az u.n. újrakezdési (reset) folyamatoknak].

Feladatok:

(i) Irjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymászó milyen P_n valószínűséggel van $n\ell$ magasságban!

(ii) Határozzuk meg, hogy átlagosan milyen magasra jut a hegymászó, valamint az átlag körüli szórás stacionárius értékét!

(3) (40) (Nem kötelező)

A 6. előadáson vizsgáltuk a master egyenlet megoldási módszereit, s az egyik példa a sorbanállás alapproblémájának általánosítása volt. Feltételeztük, hogy hosszabb sor esetén megjelenhet a főnök, ezért a pénztáros gyorsabban dolgozik. Ezt úgy vettük figyelembe, hogy egy egyszerű w_{ki} alakot választottunk, ami tudja az effektust, pl. a ráta lineárisan nő a sor hosszával

$$w_{ki} = w_{ki}^0(1 + \alpha n)\,. \tag{1}$$

A bonyodalmat itt az átmeneti ráta n-függése okozza, s az adott esetben a dimenzió nélküli α paramétert kicsinek vettük ($\alpha \ll 1$) és sorbafejtettünk az egzaktul megoldható $\alpha = 0$ körül. Az eredmény nem volt túl biztató (pl. az első rend szinguláris $q = w_{be}/w_{ki}^0 = 1$-nél).

Feladat:

Oldjuk meg a problémát (átlagos sorhossz és szórása) felgöngyölítéses módszerrel véges α, konkrétan $\alpha = 1$ esetre. Analizáljuk az eredményt, s vizsgáljuk meg, hogy van-e szingularitás (végtelen sorhossz) bármilyen q-ra!