Véletlen folyamatok házi feladatai. 6. hét. Beadási határidő: Márc. 23. 9PM.

(1) (20 pont)

Tegyük fel, hogy a kolloidrészecskék diffúziós együtthatójára kapott kifejezés extrapolálható molekuláris szintre. Milyen értéket kapunk egy nem túlságosan nagy molekulekula (pl. Buckminsterfullerene: 60 szénatom focilabdaszerű elrendezésben, átmérő: 1.01 nm) vízben történő termális mozgásának diffúziós együtthatójára? És mit kapunk egy biológiai molekulára (pl. a felgombolyodott emberi DNS-re)?

(2) (40 pont)

Csön-csön gyűrűt játszanak hárman. A gyűrűt a körben álló játékosok az óramutató járásával egy irányban adják tovább. Az 1-es gyereknél indul a gyűrű, s a továbbadási ráta $w = 3/\text{perc}$.

(i) Írjuk fel az egyenletet annak a valószínűségére, hogy a gyűrű az i-edik gyereknél van!

(ii) Határozzuk meg a stacionáris megoldást!

(iii) Mi lesz annak a valószínűsége, hogy 5 perc múlva a gyűrű a harmadik gyereknél található! Emlékezzünk a 2-spin számolásra (4. előadás): Hogyan számoltuk egy állapot valószínűségét adott kezdeti feltétel mellett?

(iv) Határozzuk meg rendszer relaxációs idejét (először próbáljuk megbecsülni az értékét)!

(3) (40 pont)

Meredek hegyoldalban függőlegesen ℓ távolságra vannak a kapaszkodók. A hegymászó w rátával lép felfelé, s w_0 annak a rátája, hogy lecsúszik egy szintet, s onnan folytatja a mászást.

(i) Írjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymászó milyen P_n valószínűséggel van $n\ell$ magasságban!

(ii) Használjuk a felgöngyölítés módszerét a stacionárius eloszlás kiszámítására!

(iii) A stacionárius állapotban teljesül a részletes egyensúly elve?

(iv) Határozzuk meg, hogy átlagosan milyen magasra jut a hegymászó!

(v) Van itt hasonlóság a sorbanállás problémájával?

(vi) Deriváljuk az eloszlásfüggvény első momentumára (az átlagosan elért magasság időfüggésére) vonatkozó differenciálegyenletet.