Véletlen folyamatok házi feladatai. 7.-8. hét. Beadási határidő: ápr. 21., 12:20.

(1) (60 pont)

Végezzünk szimulácókat az egy-dimenziós Ising modellre. A rendszer állapotát egydimenziós rács pontjaiban ($i = 1, 2, ..., N$) ülő $s_i = \pm 1$ spinek határozzák meg. A spinek szomszédjaikkal ferromágnesesen hatnak kölcsön, azaz egy állapot energiája a következő

$$E(s_1, s_2, ..., s_N) = -J \sum_{1}^{N-1} s_i s_{i+1} \quad , \quad J > 0\,. \tag{1}$$

A spinek T hőmérsékletű környezettel vannak kölcsönhatásban, s ennek eredményeképpen átbillenhetnek egyik állapotukból a másikba ($s_i \leftrightarrow -s_i$).

Válasszunk spin-flip rátának egy olyan alakot, ami kielégíti a részletes egyensúly elvét. Ilyen lesz például ha az i-edik spin forgatásának rátája a következő alak ($1/s$ egységben mérve):

$$w_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_N) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \Delta E < 0 \\ 1/2 & \text{if} \quad \Delta E = 0 \\ \exp\left(-\beta \Delta E\right) & \text{if} \quad \Delta E > 0 \end{cases} \tag{2}$$

ahol, mint könnyen belátható

$$\Delta E = 2 J s_i (s_{i-1} + s_{i+1})\,. \tag{3}$$

Legyen $N = 100$, s kezdjük a rendszer szimulálását teljesen véletlenszerű állapotból, ahol $1/2$ valószínűséggel $s_i = \pm 1$ (az egyensúlyi átlagok nem függhetnek a kezdeti feltételtől, tehát eredményeink helyességét ellenőrizhetjük azzal, hogy teljesen rendezett állapotból indítjuk a rendszert, s megnézzük ugyanazt kapjuk-e).

A szimulálás a következő lépésekből áll.

1. Véletlenszerűen kiválasztunk egy spint.
2. Megnézzük, hogy ha megforgatjuk, akkor mennyit vátozik a rendszer energiája, azaz kiszámítjuk ΔE-t.
3. Ha $\Delta E < 0$, akkor megforgatjuk a spint, s megyünk az (1)-es ponthoz.
4. Ha $\Delta E = 0$, akkor húzunk egy véletlen számot P-t a $[0, 1]$ intervallumból, s ha $P < 1/2$, akkor megforgatjuk a spint, s megyünk az (1)-es ponthoz. Ha $P > 1/2$, akkor forgatás nélkül megyünk az (1)-es ponthoz.
5. Ha $\Delta E > 0$, akkor húzunk egy véletlen számot P-t a $[0, 1]$ intervallumból, s ha $P < \exp\left(-\beta \Delta E\right)$, akkor megforgatjuk a spint, egyébként megyünk az (1)-es ponthoz.

Az (1)-(5) pontokat sokszor, $N * t$-szer elvégezve azt mondjuk, hogy t idő telt el. Minden rendszernek van általában egy relaxációs ideje, τ, s ha $t > \tau$, akkor a rendszer elérkezik az egyensúlyba, s attól kezdve a különböző mennyiségek, mint például a mágnesezettség

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s_i\,, \tag{4}$$

vagy a mágnesezettség fluktuációja m^2, az egyensúlyi értéke körül fluktuál. Az egyensúlyi átlagokat ($\langle m\rangle, \langle m^2\rangle$) tehát megbecsülhetjük mint időátlagokat. Ez azt jelenti, hogy t_1 időnként kiszámítjuk (megmérjük) az m és az m^2 értékét, majd elég sok ilyen mérésből átlagokat számolunk, s ezek megadják a T hőmérsékleti termodinamikai átlagokat, $\langle m\rangle$-t és $\langle m^2\rangle$-t.

Határozzuk meg az $\langle m\rangle$ és az $\langle m^2\rangle$ átlagokat $\beta J = 0.1,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.8,\ 1.6$ hőmérsékleteken! Értelmezzük az eredményt!

(2) (40 pont)

Vizsgáljuk az előadáson tárgyalt sorbanállási probléma következő általánosítását: A pénztáros annál gyorsabban dolgozik minél többen állnak a sorban (azaz minél nagyobb n), s a kimenet (a sor hosszának eggyel történő rövidülésének) rátája a következőképpen írható:

$$w_k = w_k^{(0)}(1+\alpha n)\,, \tag{5}$$

ahol $w_k^{(0)}$ és α ismert paraméterek. Írjuk fel a master egyenletet, majd deriváljuk az átlagos sorhossz időfejlődését és a fluktuációkat meghatározó egyenleteteket

$$\partial_t\langle n\rangle = F_1\Big(\langle n\rangle, \langle n^2\rangle, ...\Big) \tag{6}$$

$$\partial_t\langle n^2\rangle = F_2\Big(\langle n\rangle, \langle n^2\rangle, ...\Big)\ . \tag{7}$$

Határozzuk meg $\langle n\rangle$ stacionárius értékét valamilyen közelítésben (pl. hanyagoljuk el a fluktuációkat; esetleg használjunk sorfejtést kis α-ra, azaz α-ban első rendig számoljunk mindent)!