Véletlen folyamatok HF. **7. hét.** **Beadási határidő: ápr. 8., 10:00.**

(1) (30 pont)

Egydimenziós kvantum oszcillátor lehetséges energiái $E_n = E_0 + h\nu n$, ahol ν az oszcillátor frekvenciája, h a Planck konstans és n lehetséges értékei $n = 0, 1, ..., \infty$. Az oszcillátor T hőmérsékletű környezetben van, amelynek hatására átmenetek történnek az energiaszintek között. Tegyük fel, hogy csak szomszédos energiaszintek között van átmenet, s w_{fel} és w_{le} annak rátái, hogy az átmenet $n \to n+1$, illetve $n \to n-1$ között történik.

Feladatok:

(1) Használjuk a sorbanállással és a hegymászással kapcsolatban tanultakat az oszcillátor n-edik állapotának valószínűségét, $P_n(t)$-t, meghatározó master egyenlet felírására!

(2) Határozzuk meg az oszcillátor átlagos gerjesztettségi szintjét!

(3) A rendszer T hőmérsékletű környezete milyen feltételt ró ki az átmeneti ráták hányadosára, $q = w_{fel}/w_{le}$-re?

(4) Határozzuk meg a stacionárius (ebben az esetben egyensúlyi) eloszlásfüggvényt a "felgöngyölítéses" módszerrel! Megegyezik az eredmény a statisztikus fizikából várt Boltzmann eloszlással?

(2) (20 pont)

Vizsgáljuk a 7. előadáson tárgyalt hegymászás probléma egyszerűsített változatát! A hegymászó a meredek hegyoldalban ℓ távolságra levő kapaszkodókon w_{fel} rátával lép felfelé, s w_{le} annak a rátája, hogy lecsúszik a kiindulási szintre. A különbség az előadáshoz képest az, hogy a hegymászó nem fárad el, s a lecsúszás valószínűsége nem nő a magassággal, tehát w_{le} egy konstans.

Feladatok:

(1) Írjuk fel a egyszerűsített master egyenletet az $n\ell$ magasság elérésének valószínűségére!

(2) Gyakoroljuk ezen az egyszerűbb feladaton a momentumokra ($\langle n^k \rangle$) felírt egyenletek származtatását, s határozzuk meg az 1. és 2. momentum, valamint a szórás stacionárius értékét!

(2) Határozzuk meg a stacionárius eloszlásfüggvényt a "felgöngyölítéses" módszerrel!

(3) (30 pont)

A 7. előadáson tárgyalt hegymászás problémában a hegymászó a meredek hegyoldalban ℓ távolságra levő kapaszkodókon w_{fel} rátával lép felfelé, s w_{le} annak a rátája, hogy lecsúszik a kiindulási szintre. Az előadáson feltételeztük, hogy a hegymászó fárad ahogy egyre magasabbra jut, s a lecsúszás rátája a következőképpen nő a magassággal $w_{le} = w_{le}^0(1 + \alpha n)$, ahol n az n-edik magassági szintet ($n\ell$) jelenti. A problémát átlagtér közelítésben oldottuk meg úgy, hogy egyenletet írtunk fel az első momentum átlagára ($\langle n \rangle$), s az egyenletet zárttá tettük azzal, hogy a magasabb momentumokat alacsonyabb rendűekkel közelítettük.

Feladat:

Tegyük fel, hogy a hegymászó gyorsan fárad, s a lecsúszás rátája a következő $w_{le} = w_{le}^0(1 + \alpha n^2)$. Írjuk fel az egyenletet az első momentumra (az átlagos magasságra), használjunk átlagtér közelítést, s határozzuk meg az átlagos magasság stacionárius értékét! Hogyan változik a stacionárius magasság az előadáson számoltakhoz képest?