Véletlen folyamatok házi feladatai. 8. hét. Beadási határidő: ápr. 15., 10:00.

(1) 20 pt

A 8. előadáson megoldottuk az Erdős-Rényi gráf dinamikai hálózatként értelmezett általánosítását. Meghatároztuk a hálózat fokszámeloszlását, $P_k(t)$-t, amelyre Poisson eloszlást kaptunk. Ebből következett, hogy a fokszám átlaga egyenlő a szórásnégyzetének átlagával, $\langle k \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$. A feladat most ennek az eredménynek a deriválása a fokszámeloszlás meghatározása nélkül. Ehhez vissza kell térnünk a $P_k(t)$-ra vonatkozó master egyenlethez [8. előadás jegyzete, (8-9) egyenlet], s származtatnunk kell a $\langle k \rangle$-ra és $\langle k^2 \rangle$-re vonatkozó differenciálegyenleteket (a származtatás menetére lásd a 7. előadást) és persze meg kell találnunk a megoldásukat is.

Az adott esetben a modell elég egyszerű ahhoz, hogy differenciálegyenletek zártak legyenek, azaz ne tartalmazzák k magasabb momentumainak átlagát, s megoldásuk se legyen nehéz.

(2) 20 pt

Száz, egymást nem ismerő gyerek érkezik egy nyári táborba. A kéthetes üdülés végén megkérdezik őket, hogy hány új barátot szereztek a táborozás során. A válaszokból kiderül, hogy az új barátok számának átlaga 4.3, a szórás pedig 2.1. Látva ezeket a számokat, a fizikus táborvezető a barátságok kialakulásának dinamikájaként az Erdős-Rényi modellre gyanakszik. Ezért kiadja az egyik, a táborban segédkező fizikus diáknak, hogy feltételezve az Erdős-Rényi dinamikát, határozza meg két táborozó közötti barátság kialakulásának rátáját. Következő nap a diák azzal a megjegyzéssel hozza a választ, hogy ezt fejben is ki lehet számolni. Mi az válasz?

(3) 40 pt

Az egyik legegyszerűbb hálózatnövekedési dinamika a *véletlen rekurzív fát* állítja elő. A hálózat növekedése abból áll, hogy minden lépésben egy új csúcsot kötünk egy éllel a meglévő csúcsok egyikéhez, egyenlő valószínűséggel bármelyikhez.

Tehát a hálózat 1 csúccsal indul, s első lépésben csak hozzákötjük a második csúcsot. A második lépésben már 2 csúcs közül választ a bejövő harmadik csúcs, s a választás a 2 csúcs közül egyenlő, azaz 1/2-1/2 valószínűséggel történik. Hasonlóan, a negyedik csúcs 1/3-1/3-1/3 valószínűséggel kötődik a meglévő 3 csúcs egyikéhez. Ez a növekedési dinamika folytatódik (rekurzív módon, innen a rekurzív fa elnevezés), amíg felépül egy $N \gg 1$ csúcsból álló fa.

Szimuláljuk a fentiekben definiált rekurzív fát, s oldjuk meg az alábbi feladatokat.

(i) Próbáljunk elgondolkodni azon, hogy milyen jellegű fokszámeloszlásra számíthatunk, s miért fog ez különbözni az Erdős-Rényi dinamika eredményétől!

(ii) Határozzuk meg a csúcsok fokszámeloszlását ($P_k = N_k/N$, ahol N a csúcsok száma, N_k pedig a k éllel rendelkező csúcsok száma)!

(iii) Az egzakt eloszlásfüggvény ismert (a 9. előadáson kiszámoljuk), s az eredmény $N \to \infty$-re a következő: $P_k = 1/2^k$ ($k \geq 1$). Határozzuk meg az átlagos fokszámot a szimulációkból, s ellenőrizzük, hogy egyezik-e az eredmény az elméleti eloszlásfüggvényből számoltakkal!