

## Véletlen folyamatok házi feladatai. 8. hét. Beadási határidő: Április 13. 9PM

(1) 25 pt

A 8. előadáson megoldottuk az Erdős-Rényi gráf dinamikai hálózatként értelmezett általánosítását. Meghatároztuk a hálózat fokszámeloszlását,  $P_k(t)$ -t, amelyre Poisson eloszlást kaptunk. Ebből következett, hogy a foksám átlaga egyenlő a szórásnégyzetének átlagával,  $\langle k \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$ . A feladat most ennek az eredménynek a deriválása a fokszámeloszlás meghatározása nélkül. Ehhez vissza kell térnünk a  $P_k(t)$ -ra vonatkozó master egyenlethez [8. előadás jegyzete, (8-9) egyenlet], s származtatnunk kell a  $\langle k \rangle$ -ra és  $\langle k^2 \rangle$ -re vonatkozó differenciálegyenleteket (a származtatás menetére lásd a 7. előadást) és persze meg kell találnunk a megoldásukat is.

Adott esetben a modell elég egyszerű ahhoz, hogy differenciálegyenletek zártak legyenek, azaz ne tartalmazzák  $k$  magasabb momentumainak átlagát és megoldásuk sem nehéz.

(2) 25 pt

Száz, egymást nem ismerő gyerek érkezik egy nyári táborba. A kéthetes üdülés végén megkérdezik őket, hogy hány új barátot szereztek a táborozás során. Kiderül, hogy az új barátok számának átlaga 5.8, a szórás pedig 2.4. A táborvezető a barátságok kialakulásának dinamikájaként a 8. előadáson tárgyalt Erdős-Rényi modellre gyanakszik (értjük, hogy miért?). Ezért kiadja, a táborban segédkező fizikus diáknak, hogy feltételezve az Erdős-Rényi dinamikát, határozza meg két táborozó közötti barátság kialakulásának rátáját. Következő nap a diák azzal a megjegyzéssel hozza a választ, hogy ezt fejben is ki lehet számolni. Mi a válasz?

Határozzuk meg, hogy várhatóan hány gyereknek lesz több, mint 7 új barátja!

(3) 50 pt

Szimuláljuk az órán tárgyalt *véletlen rekurzív fát* (minden lépésben egy új csúcsot adunk a hálózathoz, s az új csúcsot egyenlő valószínűséggel kötjük a meglévő csúcsok egyikéhez). Az előadáson meghatároztuk a csúcsok fokszámeloszlását  $P_k = N_k/N$ -t (ahol  $N$  a csúcsok száma,  $N_k$  pedig a  $k$  éllel rendelkező csúcsok száma) az  $N \rightarrow \infty$  limeszben. A számolás során feltételeztük, hogy nagy  $N$ -re a kvázistacionáris közelítést alkalmazhatjuk, ami azt jelenti, hogy  $N_k \sim N$ , azaz  $P_k(N) = N_k/N$  függetlenné válik  $N$ -től.

Feladatok:

(i) A szimulációban határozzuk meg a  $k$  éllel rendelkező csúcsok számát,  $N_k$ -t,  $k = 1, 2, \dots, 10$ -re, s vizsgáljuk, mekkora  $N$ -nél látható már jól az  $N_k \sim N$  arányosság.

(ii) Vizsgáljuk, mekkora  $N$  kell ahhoz, hogy az eloszlásfüggvény  $P_k$  hibája kisebb legyen mint 20% minden  $k \leq 10$ -re. Figyelem, az  $N \rightarrow \infty$  eloszlásfüggvényt az órán kiszámoltuk!

(iii) Határozzuk meg az átlagos foksámot elméletileg és a szimulációkból is!

(iv) Találjuk meg a maximális foksámú csúcsot a fenti szimulációkban generált hálózatokban. Többször megismételve a szimulációkat  $N = 100, 1000$  és  $10000$  esetére, határozzuk meg a maximális foksám átlagát,  $\langle k_{max} \rangle$ -t! Látunk trendet az eredményekben?