

**Véletlen folyamatok házi feladatai. 9-10. hét. Beadási határidő: ápr. 29., 10:00.**

(1) 60pt

Ez egy példa arra, hogy a hálózatnövekedési dinamika lényegtelennek tűnő részletei is erősen befolyásolhatják a fokszámeloszlás funkcionális formáját. Vizsgáljuk a lineáris preferenciával növekedő hálózat általánosítását, ahol egy  $k$  fokszámú csúcshoz való csatolódás rátája (egységnyi idő alatti csatolódás valószínűsége)

$$w_k = \frac{k^\alpha + \lambda}{\sum_\ell (\ell^\alpha + \lambda) N_\ell} \quad , \quad (1)$$

ahol  $N_k$  a  $k$  fokszámú csúcsok száma, s  $\alpha$  és  $\lambda$  a modell paraméterei ( $\alpha > 0$  estén beszélünk preferenciális a csatolódásról, míg az  $\alpha < 0$  esetet nevezhetjük antipreferenciális csatolódásnak, hiszen a nagyobb élszámú csúcsokhoz történő csatolódás ekkor kisebb valószínűségű).

A 9. előadáson levezettük, hogy  $\alpha = 1$  és  $\lambda = 0$  (lineáris preferencia) esetén a fokszámeloszlás nagy  $k$ -ra hatvány alakú  $P_k \sim k^{-3}$ .

Feladatok:

(1) Vigyük végig a lineáris preferenciára alkalmazott számolást az  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 1$  esetre (eltolt lineáris preferencia) és mutassuk meg, hogy ekkor az eloszlás nagy- $k$  alakja továbbra is hatványszerű, de a hatványkitevő megváltozik:

$$P_k \sim k^{-4} . \quad (2)$$

(2) Szimuláljuk az (1) rátával definiált hálózatot az alábbiakban, személyre szabottan megadott  $\alpha$  és  $\lambda$  paraméterértékek mellett.

A szimuláció egy lehetséges kivitelezése a következő: Egy lépésben egy csúcsot adunk a hálózathoz, s az  $N + 1$ -edik csúcs csatolásának szabályai a következők:

(i) Adott  $N$ -re meghatározzuk a normálási konstans  $A = \sum_\ell (\ell^\alpha + \lambda) N_\ell$  a csatolódási rátában (1).

(ii) Véletlenszerűen kiválasztunk egyet a már meglévő  $N$  csúcs közül.

(iii) Leszámoljuk a kiválasztott csúcs éleinek számát. Legyen ez a szám  $k$ .

(iv) A kiválasztott csúcshoz  $w_k = (k^\alpha + \lambda)/A$  valószínűséggel csatoljuk az új csúcsot.

(v) Ha a csúcshoz nem történik meg a csatolódás, akkor vissza a (ii) ponthoz. Ha a csatolódás megtörtént, akkor  $N \rightarrow N + 1$  és vissza az (i) ponthoz egészen addig, amíg a hálózatnak  $N$  (elég nagy számú!?) csúcsa nem lesz.

Ezek után:

(a) Mérjük meg a csúcsok fokszámeloszlását,  $P_k = N_k/N$ -t!

(b) Vizsgáljuk a fokszámeloszlás nagy- $k$  aszimptotikáját (hatvány szerű?, exponenciális?, exponenciálisnál is gyorsabban csökken?), s hasonlítsuk össze az eredményt a preferenciális csatolásra ( $w_k \sim k$ ) kapottakkal!

A személyre szabott  $(\alpha, \lambda)$  értékek:

$(\alpha, \lambda)$	0.50, 0.00	Albert Andrea
	1.50, 0.00	Bakó Bence

-1.0, 1.00	Borkovits Bendegúz
-2.0, 0.00	Bódy Lőrinc
1.20, 0.30	Dajka Bence
-0.5, 2.00	Fejes Milán
1.05, 2.00	Fodor Dániel
0.80, 0.00	Godó Dániel
-0.5, 0.50	Klement Balázs
1.20, 1.05	Méhes Máté
1.30, -0.5	Míg András
1.00, -0.5	Misur Patrícia
0.50, -0.7	Papp János
0.25, 1.50	Papp Krisztina
-0.5, 0.00	Sándor Szende
2.00, 0.00	Szénási Attila
0.50, 1.00	Márkuszt István
-1.0, 0.50	Vass Máté

**(2)** 50pt

A 9. előadáson vizsgált, lineáris preferenciával növekedő hálózatban egy  $k$  fokszámú csúcshoz való csatolódás valószínűsége  $k / \sum_{\ell} \ell N_{\ell}$ , ahol  $N_k$  a  $k$  fokszámú csúcsok száma. Az előadáson megmutattuk, hogy a fokszámeloszlás nagy  $k$ -ra hatvány alakú  $P_k \sim k^{-3}$ .

Feladatok:

(1) Vizsgáljuk meg, hogy a fenti eredmény függ-e a kezdeti feltételektől! Indítsunk szimulációkat

(i) egy csúcsból,

(ii) öt, lineárisan csatolt csúcsból [ $N_1(t=0) = 2, N_2(0) = 3, N_{k \neq 1,2} = 0$ ],

(iii) öt, kereszt alakban összekapcsolt csúcsból [ $N_1(0) = 4, N_4(0) = 1, N_{k \neq 1,4} = 0$ ],

s hasonlítsuk össze a fokszámeloszlások nagy  $k$ -s viselkedését nagy (csúcsok száma:  $N \approx 10^5 - 10^6$ ) hálózatokra.

(2) Szociális hálóokban a nagy fokszámú csúcsoknak jelentős szerepük lehet. Találjuk meg a maximális fokszámú csúcsot a fenti szimulációkban generált hálózatokban, s határozzuk meg a maximális fokszám átlagát  $\langle k_{max} \rangle$  elég nagy csúcscsám esetére.

(3) Függ-e  $\langle k_{max} \rangle$  a kezdeti feltételektől?

**(3)** Nem kötelező, bármikor beadható az év folyamán. Azoknak írtam ki, akik gondolkodnak extrémekről A példa arra int, hogy óvatosan kell bánni a fogadásokkal.

Egy fogadóirodában a következő játékot lehet játszani 1000Ft-ért. Adnak egy zárt borítékot, amelyben egy ismeretlen egész szám  $N_{bor}$  van felírva. Ezután 1 milliószor húzunk a normál eloszlásból, amelynek a valószínűségsűrűsége  $P(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$  (számítógép és a megfelelő program biztosított). Kiválasztjuk a kapott legnagyobb értéket  $x_{max}$ , s kerekítjük a legközelebbi egészhez,  $N_{max} = \text{Kerekít}(x_{max})$ . Ezután felnyitjuk a borítékot, s ha azt találjuk, hogy  $N_{max} = N_{bor}$ , akkor pénzünk elveszett. Ellenkező esetben viszont visszkapjuk pénzünket, plusz még 10000Ft-ot.

Kérdések:

(1) Milyen szám van a borítékban?

(2) Érdemes-e fogadni a fenti játékban?