Véletlen folyamatok házi feladatai. 9. hét. Beadási határidő: ápr. 23., 8PM.

(1) 50pt

Ez egy példa arra, hogy a hálózatnövekedési dinamika lényegtelennek tűnő részletei is erősen befolyásolhatják a fokszámeloszlás funkcionális formáját. Vizsgáljuk a lineáris preferenciával növekedő hálózat általánosítását, ahol egy k fokszámú csúcshoz való csatolódás rátája (egységnyi idő alatti csatolódás valószínűsége)

$$w_k = \frac{k^\alpha + \lambda}{\sum_\ell (\ell^\alpha + \lambda) N_\ell} \quad , \tag{1}$$

ahol N_k a k fokszámú csúcsok száma, s α és λ a modell paraméterei ($\alpha > 0$ estén beszélünk preferenciális a csatolódásról, míg az $\alpha < 0$ esetet nevezhetjük antipreferenciális csatolódásnak, hiszen a nagyobb élszámú csúcsokhoz történő csatolódás ekkor kisebb valószínűségű).

A 9. előadáson levezettük, hogy $\alpha = 1$ és $\lambda = 0$ (lineáris preferencia) esetén a fokszámeloszlás nagy k-ra hatvány alakú $P_k \sim k^{-3}$.

Feladatok:

(1) Vigyük végig a lineáris preferenciára alkalmazott számolást az $\alpha = 1$, $\lambda = 1$ esetre (eltolt lineáris preferencia) és mutassuk meg, hogy ekkor az eloszlás nagy-k alakja továbbra is hatványszerű, de a hatványkitevő megváltozik:

$$P_k \sim k^{-4} . \tag{2}$$

(2) Szimuláljuk az (1) rátával definiált hálózatot az alábbiakban, személyre szabottan megadott α és λ paraméterértékek mellett.

A szimuláció egy lehetséges kivitelezése a következő: Egy lépésben egy csúcsot adunk a hálózathoz, s az $N+1$-edik csúcs csatolásának szabályai a következők:

(i) Adott N-re meghatározzuk a normálási konstanst, $A = \sum_\ell (\ell^\alpha + \lambda) N_\ell$, a csatolódási rátában (1).

(ii) Véletlenszerűen kiválasztunk egyet a már meglévő N csúcs közül.

(iii) Leszámoljuk a kiválasztott csúcs éleinek számát. Legyen ez a szám k.

(iv) A kiválasztott csúcshoz $w_k = (k^\alpha + \lambda)/A$ valószínűséggel csatoljuk az új csúcsot.

(v) Ha a csúcshoz nem történik meg a csatolódás, akkor vissza a (ii) ponthoz. Ha a csatolódás megtörtént, akkor $N \to N+1$ és vissza az (i) ponthoz egészen addig, amíg a hálózatnak N (elég nagy számú?!) csúcsa nem lesz.

Ezek után:

(a) Mérjük meg a csúcsok fokszámeloszlását, $P_k = N_k/N$-t!

(b) Vizsgáljuk a fokszámeloszlás nagy-k aszimptotikáját (hatvány szerű?, exponenciális?, exponenciálisnál is gyorsabban csökken?), s hasonlítsuk össze az eredményt a preferenciális csatolásra ($w_k \sim k$) kapottakkal!

A személyre szabott (α, λ) értékek:

(α, λ)	$0.50,\ 1.00$	Barna Zsombor
	$-0.50,\ 1.00$	Juhász János

1.00, 2.00	Lukács Krisztián
1.50, 0.00	Nemeskéri Dániel
−1.00, 3.00	Szilágyi Máté
0.20, 2.00	Villám Barna

(2) 50pt

A 9. előadáson vizsgált, lineáris preferenciával növekedő hálózatban egy k fokszámú csúcshoz való csatolódás valószínűsége $k/\sum_\ell \ell N_\ell$, ahol N_k a k fokszámú csúcsok száma. Az előadáson megmutattuk, hogy a fokszámeloszlás nagy k-ra hatvány alakú $P_k \sim k^{-3}$.

Feladatok:

(1) Vizsgáljuk meg, hogy a fenti eredmény függ-e a kezdeti feltételektől! Indítsunk szimulációkat

(i) egy csúcsból,

(ii) öt, lineárisan csatolt csúcsból $[N_1(t=0)=2,\ N_2(0)=3,\ N_{k\neq 1,2}=0]$,

(iii) öt, kereszt alakban összekapcsolt csúcsból $[N_1(0)=4,\ N_4(0)=1,\ N_{k\neq 1,4}=0]$,

s hasonlítsuk össze a fokszámeloszlások nagy k-s viselkedését nagy (csúcsok száma: $N \approx 10^5 - 10^6$) hálózatokra.

(2) Szociális hálókban a nagy fokszámú csúcsoknak jelentős szerepük lehet. Találjuk meg a maximális fokszámú csúcsot a fenti szimulációkban generált hálózatokban, s határozzuk meg a maximális fokszám átlagát $\langle k_{max} \rangle$ elég nagy csúcsszám esetére.

(3) Függ-e $\langle k_{max} \rangle$ a kezdeti feltételektől?

(3) Nem kötelező, bármikor beadható. Azoknak írtam ki, akik gondolkodnak extrémekről. A példa arra int, hogy óvatosan kell bánni a fogadásokkal.

Egy fogadóirodában a következő játékot lehet játszani 10000Ft-ért. Adnak egy zárt borítékot, amelyben egy ismeretlen egész szám N_{bor} van felírva. Ezután 1 milliószor húzunk a normál eloszlásból, amelynek a valószínűségsűrűsége $P(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$ (számítógép és a megfelelő program biztosított). Kiválasztjuk a kapott legnagyobb értéket x_{max}, s kerekítjük a legközelebbi egészhez, N_{max} =Kerekít(x_{max}). Ezután felnyitjuk a borítékot, s ha azt találjuk, hogy $N_{max} = N_{bor}$, akkor pénzünk elveszett. Ellenkező esetben viszont visszakapjuk pénzünket, plusz még 100000Ft-ot.

Kérdések:

(1) Milyen szám van a boritékban?

(2) Érdemes-e fogadni a fenti játékban?