Sorbanállási problémák – generátorfüggvények.

Az előadás célja.

A master egyenlet struktúráját már megértettük, s megtanultuk hogyan kell felírni az egyenletet egyszerű esetekben. A továbbiakban megtanuljuk, hogyan kell megoldani ezeket az egyenleteket. Elsőre egy sorbanállási problémát vizsgálunk, s bevezetjük az u.n. generátorfüggvényeket, amelyek segítségével meghatározzuk a probléma stacionárius megoldását.

A sorbanállási probléma.

Képzeljük el, hogy nyári gyakorlaton vagyunk az egyik nagyáruházban, amely hirdetést adott ki arról, hogy náluk kettőnél többen sosem állnak sorban a pénztárnál. Mint kiderül, a fluktuációk ennél sokkal nagyobbak. Miután a főnök meghallja, hogy van egy fizikus a gyakornokok között, megbízza, hogy dolgozzon ki egy modellt, amely megjósolja, hogy átlagosan hány vásárló áll a sorban, s mekkora a fluktuáció az átlag körül.

A fizikus gyakornok, ahogy kell, először egyszerűsíti a problémát arra, amikor csak egy pénztár van nyitva. Ezután megméri, hogy milyen gyakran érkezik egy új vásárló a sorba. A mérés eredménye w_{be}: az egységnyi idő alatt beérkező vásárlók száma (másképp mondva: a sor hossza w_{be} rátával nő n-ről $n+1$-re).

Ezután a pénztárosra fordítja figyelmét, s megméri, hogy milyen gyakran hagyja el egy vásáró a pénztárt. A mérés eredménye w_{ki}: az egységnyi idő alatt kiszolgált vásárlók száma (másképp mondva: a sor hossza w_{ki} rátával csökken n-ről $n-1$-re).

A két mért paraméter segítségével már felírhatja a folyamat master egyenletét. Legyen $P_n(t)$ annak a valószínűsége, hogy a pénztárnál álló sor hossza $n = 0, 1, 2, ...$ Ekkor a ki- és bemeneteli eseményeket figyelembe vevő master egyenlet a következőképpen néz ki

$$\dot{P}_n(t) = -(w_{be} + w_{ki})P_n(t) + w_{be}P_{n-1} + w_{ki}P_{n+1} \quad . \tag{1}$$

A fenti egyenlet jobb oldalán az első tag azt írja le, hogy a sor hossza n vagy azért változik, mert bejön egy vásárló, vagy pedig azért, mert egy fizető vásárló elhagyja a sort. A 2. és 3. tag az n hosszúságú sor valószínűségének növekedését írja le amiatt, hogy az $n-1$ hosszúságú sorba beáll egy új vásárló, vagy az $n+1$ hosszúságú sorból egy vásárló kifizette a számláját.

Fontos észrevenni, hogy a fenti egyenlet nem írja le azt a szituációt, amikor $n = 0$, azaz nincs senki a sorban. A $P_0(t)$ valószínűséget külön kell kezelni, s kis gondolkodás után érthető lesz, hogy a következő egyenletnek tesz eleget

$$\dot{P}_0(t) = -w_{be}P_0(t) + w_{ki}P_1 \quad , \tag{2}$$

ahol a jobb oldali tagok azt írják le, hogy bejön a vásárló az üres pénztárhoz, vagy pedig pénztáros kiszolgálja az egyetlen sorbanállót.

A fenti egyenletekben szereplő két paraméter közül az egyiket (mondjuk w_{ki}-t) eliminálni lehet megfelelő időskála választással. Leosztva az egyenleteket w_{ki}-vel, bevezetve a $t' = w_{ki}t$ dimenziótlan időt, valamint az átmeneti ráták hányadosát

$$q = \frac{w_{be}}{w_{ki}} \quad , \tag{3}$$

a megoldandó egyenletek a következő alakot veszik fel

$$\dot{P}_n(t) = -(1+q)P_n(t) + qP_{n-1} + P_{n+1} \quad . \tag{4}$$

$$\dot{P}_0(t) = -qP_0(t) + P_1 \quad , \tag{5}$$

ahol az időderiváltak alatt a továbbiakban a dimenziótlan idő szerinti deriváltat értjük.

Kérdés: A $q = w_{be}/w_{ki}$ paraméter milyen értékeire várjuk, hogy a fenti egyenletrendszernek stacionárius megoldása lesz?

Válasz: Ha $w_{be} > w_{ki}$, akkor a sor egyre nő, s ennek a növekedésnek semmi sem vet gátat. Tehát stacionárius megoldást csak $q < 1$ értékekre várhatunk.

Tegyük fel, hogy megoldottuk a fenti egyenletrendszert. Mi az, ami minket, illetve a főnököt érdekli? A sor átlagos hossza $\langle n \rangle$ és a szórás az átlag körül $\sigma = [\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2]^{1/2}$. Ezek meghatározásához az eloszlásfüggvény, $P_n(t)$, első és második momentumát kell kiszámolnunk

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t) \quad , \quad \langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) \quad . \tag{6}$$

A (4,5) egyenletek megoldásának egyik módszere, amely természetes módon szolgáltatja a (6) átlagokat, a momentum generátor függvény használata. Nevének megfelelően a momentum generátor függvény az eloszlásfüggvény momentumait generálja. Definíciója a következő:

$$G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n(t) \quad , \tag{7}$$

s könnyen beláthatók következő tulajdonságai

$$G(0,t) = \sum P_n(t) = 1 \quad , \tag{8}$$

ami a normalizációból következik,

$$-\left(\frac{\partial G}{\partial s}\right)_{s=0} = \sum_n nP_n(t) = \langle n(t) \rangle \qquad \text{1. momentum,} \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}\right)_{s=0} = \langle n^2(t) \rangle \qquad \text{2. momentum,} \tag{10}$$

és általában

$$(-1)^k \left(\frac{\partial^2 G}{\partial s^k}\right)_{s=0} = \langle n^k(t) \rangle \qquad \mathrm{k-adik\,momentum.} \tag{11}$$

Tehát, ha meghatároztuk $G(s,t)$-t, akkor megkaptuk a keresett átlagos sorhosszt, $\langle n \rangle$-t, és szórását is

$$\sigma = [\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2]^{1/2} = \left[\left(\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}\right) - \left(\frac{\partial G}{\partial s}\right)^2\right]_{s=0}^{1/2} \quad . \tag{12}$$

A következő feladat tehát a $G(s,t)$-re vonatkozó egyenlet származtatása a Master egyenletből [megjegyzendő, hogy $G(s,t)$ a $P_n(t)$ Laplace transformáltja, amit gyakran használunk lineáris egyenletek (mint amilyen a Master egyenlet) megoldásához]. Első lépésként vegyük észre, hogy $G(s,t)$ időderiváltjában $\dot{P}_n(t)$ szerepel

$$\partial_t G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} \dot{P}_n(t) \quad , \tag{13}$$

amit kifejezhetünk a Master egyenlet jobb oldalán keresztül (figyelem, az $n = 0$ tagot a (5) egyenletből kell venni):

$$\partial_t G(s,t) = -qP_0 + P_1 - (1+q)\sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_n + q\sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_{n+1} \tag{14}$$

A jobb oldalon szereplő összegeket most addig alakítgatjuk, míg G meg nem jelenik. Részletesebben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_n + P_0 - P_0 = G(s,t) - P_0 \tag{15}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} P_{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s(n-1+1)} P_{n-1} = e^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s(n-1)} P_{n-1} = e^{-s} G(s,t) \tag{16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-s(n+1-1)} P_{n+1} = e^{s} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s(n+1)} P_{n+1} = e^{s} \sum_{n=2}^{\infty} e^{-sn} P_n = e^{s} G(s,t) - e^{s} P_0 - P_1 \tag{17}$$

Felhasználva a fenti azonosságokat az (14) egyenletben, megkapjuk a momentum generátor függvényre vonatkozó egyenletet

$$\partial_t G = (1-e^{s})P_0 - (1+q)G + qe^{-s}G + e^{s}G = (qe^{-s} + e^{s} - 1 - q)G + (1-e^{s})P_0 \tag{18}$$

A stacionárius állapotra $[G(s,t \to \infty) = G_{st}(s)]$ vagyunk kiváncsiak, amit a $\partial_t G = 0$ egyenletből kapunk

$$G_{st}(s) = \frac{P_0}{1 - qe^{-s}} \quad . \tag{19}$$

Az eredmény tartalmazza az eloszlásfüggvény P_n egy ismeretlen elemét, a P_0 stacionárius értékét. Kérdés, hogy honnan határozzuk meg P_0-t? A válasz: Az eloszlásfügvény normalizációjából, ami a $G_{st}(s=0) = 1$ feltételt (lásd a (8) egyenletet) jelenti

$$G_{st}(s=0) = \frac{P_0}{1-q} = 1, \qquad \text{azaz} \qquad P_0 = 1 - q \quad . \tag{20}$$

így megkaptuk a momentumgenerátor függvény stacionárius alakját

$$G_{st}(s) = \frac{1-q}{1-qe^{-s}} \quad , \tag{21}$$

aminek deriváltjaiból meghatározhatjuk a sor hosszának és szórásának stacionárius értékeit:

$$-\left(\frac{\mathrm{d}G_{st}(s)}{\mathrm{d}s}\right)_{s=0} = \langle n \rangle_{st} = \frac{q}{1-q} \quad , \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}s^2}\right)_{s=0} = \langle n^2 \rangle_{st} = \frac{q(1+q)}{(1-q)^2} \quad , \tag{22}$$

$$\sigma_{st} = \left[\langle n^2 \rangle_{st} - \langle n \rangle_{st}^2\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{q}}{1-q} \quad . \tag{23}$$

Látható, hogy beigazolódott az a várakozásunk, hogy a rendszernek stacionárius állapota csak a $q = w_{be}/w_{ki} < 1$ értékekre van. A sor hossza és a fluktuáció is divergálnak a $q \to 1$ limeszben. Figyelemre méltó az is, hogy a sor hosszának szórása mindig nagyobb a sor hosszánál (a releváns $0 < q < 1$ tartományban).

Ami ezek után a főnöknek írt jelentést illeti, ki kell mondani, hogy 1 pénztár esetén, adott (mért) w_{be}, w_{ki} paraméterekkel a (25) és (23) kifejezések adják sor hosszát és szórását, s a $\langle n\rangle_{st} = 2$ akkor valósul meg, ha $q = 2/3$, azonban a szórás nagy $\sigma_{st} = \sqrt{6} \approx 2.4$ ekkor is. Továbbá javasoljuk, hogy megvizsgálhatjuk (de ez már hosszabb időt vesz igénybe), hogy mi a helyzet a két pénztár esetén.

Megjegyzés: A momentumgenerátor függvény mellett gyakran használják a kumulánsgenerátor függvényt (Φ) is (valószínűleg találkoztak vele a valószínűségszámítás előadásokon), ami a momentumgenerátor függvény logaritmusa

$$\Phi(s) = \ln G(s) \quad . \tag{24}$$

Az első két kumuláns nem más mint az átlag és a szórásnégyzet, s a Φ első és második deriváltjával arányos (mutassuk meg az alábbi azonosságokat):

$$-\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_(s)}{\mathrm{d}s}\right)_{s=0} = \langle n\rangle \quad , \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}s^2}\right)_{s=0} = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 \quad . \tag{25}$$

A kumulánsgenerátor függvény használata gyakran egyszerűsíti a számolást, amiről meggyőződhetnek, ha meghatározzák Φ_{st}-t (24) G_{st}-on keresztül, majd újra kiszámítják $\langle n\rangle_{st}$-t és σ_{st}.

A fentiekben elég egyszerű problémát oldottunk meg, s természetesen felvetődnek olyan aspektusok, amiket figyelembe kellene venni egy realisztikusabb leírásban. Például, elég természetes azt gondolni, hogy a pénztáros gyorsabban dolgozik, ha hosszabb a sor (vagy lassabban, mert elkeseredik a hosszú sor láttán). Tehát a w_{ki} ráta n-függővé válik, s ilyenkor már nehezebb (s gyakran lehetetlen) a feladat analitikus megoldása. A következő órán egyrészt a stacionárius állapot megtalálásának generátor függvényeken túli változatait fogjuk vizsgálni, meg azt is, amikor közelítő módszereket kell kidolgozni a megoldásra.