A master egyenlet megoldási módszerei I

Az előadás célja.

Az előző előadáson generátorfüggvényeket használva megoldottuk a sorbanállás problémájának alapfokú változatát. Hasonló problémákkal a valósághoz közelítve, a master egyenlet bonyolultabbá válik, s még a stacionárius állapotot is nehéz megtalálni. A mai és a következő órán újabb megoldási módszerekkel vezetünk be, s közben megismerkedünk az u.n. születési-kihalási folyamatokkal is.

A sorbanállás stacionárius állapota – felgöngyölítéses megoldás.

Az előző órán vizsgált sorbanállási problémát a következő master egyenlet írta le:

$$\dot{P}_n(t) = -(1+q)P_n(t) + qP_{n-1}(t) + P_{n+1}(t) \quad , \qquad n > 0 \quad , \tag{1}$$

$$\dot{P}_0(t) = -qP_0(t) + P_1(t) \quad , \tag{2}$$

ahol n a sor hossza és $q = w_{be}/w_{ki}$ pedig a sorba belépők és a pénztárnál kilépők rátájának hányadosa. A fenti egyenleteket előzőleg a momentumgenerátor függvényre felírt egyenleten keresztül oldottuk meg. Amennyiben csak a stacionárius állapotra vagyunk kiváncsiak, akkor egyszerűbben is eljárhatunk, mivel csak az alábbi egyenleteket kell megoldanunk

$$0 = -(1+q)P_n^e + qP_{n-1}^e + P_{n+1}^e \quad , \tag{3}$$

$$0 = -qP_0^e + P_1^e \quad , \tag{4}$$

ahol a stacionaritást az "e" felső index jelzi a valószínűségekben (az "egyensúlyi" után, de persze itt nem egyensúlyról, csak stacionaritásról van szó).

A (4)-es egyenletből következik, hogy a P_1^e kifejezhető P_0^e-on keresztül ($P_1^e = qP_0^e$). Ha ezután megvizsgáljuk a (3)-as egyenlet $n = 1$ esetét, akkor látjuk, hogy P_2^e-t meghatározza P_0^e és P_1^e, s minthogy P_1^e-t már kifejeztük P_0^e-on keresztül, megkapjuk P_2^e-t P_0^e függvényeként ($P_2^e = q^2P_0^e$). Tovább folytatva az $n = 3, 4, ...$, esetekkel, látható, hogy egy rekurzióval van dolgunk, s P_n^e kifejezhető a kisebb indexű P_{n-1}^e, P_{n-2}^e, ... által, tehát minden P_n^e visszavezethető a P_0^e-ra. Nem nehéz megmutatni, hogy a rekurzió megoldása

$$P_n^e = q^n P_0^e \quad . \tag{5}$$

Kérdés: Honnan vesszük a P_0^e értékét? Hasonló kérdés a generátorfüggvénnyel kapcsolatban is felmerült, s a válasz most is ugyanaz: a normalizáció feltételéből

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^e = P_0^e \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{P_0^e}{1-q} = 1 \qquad \rightarrow \qquad P_0^e = 1 - q \qquad \rightarrow \qquad P_n^e = (1-q)q^n \quad . \tag{6}$$

Az fentiekben ismertetett rekurzív megoldást a "felgöngyölítés" módszerének is lehet nevezni. Indulunk a határfeltételnél ($n = 0$), s ha csak ± 1-ben különböző állapotok vannak összekötve a folyamatban, akkor minden valószínűség kifejezhető a P_0^e-n keresztül, P_0^e-t pedig a normalizáció adja.

Megjegyzés.

Látszólag a felgönygyölítéssel többet kaptunk, mint a generátorfüggvény módszerrel, hiszen ott az átlagot, fluktuációt, és általában az eloszlásfüggvény momentumait tudjuk számolni, nem pedig az eloszlásfüggvényt. Mint azt az alábbiakban láthatjuk, az adott esetben P_n^e is származtatható a generátorfüggvényből. Valóban, előző előadás (21)-es formulája a következő alakban adja a stacionárius generátorfüggvényt

$$G_{st}(s) = \frac{1-q}{1-qe^{-s}} \quad . \tag{7}$$

Sorbafejtve qe^{-s}-ben ($q < 1$, $e^{-s} < 1$) és emlékezve $G_{st}(s)$ definíciójára, kapjuk az alábbi egyenlőségeket

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n^e = G_{st}(s) = \frac{1-q}{1-qe^{-s}} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-q) q^n e^{-sn} \quad . \tag{8}$$

Összehasonlítva az első és utolsó összegeket, leolvasható a stacionárius eloszlásfüggvény $P_n^e = (1-q)q^n$, ami persze megegyezik a felgönygyölítéses módszerrel (6) kapottal.

Sorfejtés kis paraméter szerint.

Egyszerűen megoldható problémák általánosításait (amelyek közelebb visznek a valós rendszerekhez) rendszerint nem tudjuk egzaktul kezelni. Amennyiben nem akarjuk számítógépre vinni a problémát, megpróbálhatjuk az általánosítás járulékos elemeit kis perturbációnak tekinteni és sorbafejteni az egzakt megoldás körül. A továbbiakban megmutatjuk a sorbanállás példáján, hogyan történik mindez a master egyenlet formalizmusban.

Megjegyzés.

A sorfejtések általában fárasztóan és nem túl élvezetesek, s ez alól nem kivétel az alábbi számolás sem. A cél itt az, hogy megértsék a levezetés lényeges lépéseit, s ha hasonló feladatot kapnak, akkor tudják hová kell visszamenni a részletekért.

A sorbanállási problémát a következőképpen általánosítjuk. Ha csak egy-két ember áll a sorban, akkor a pénztáros szívesen elbeszélget a vevőkkel, míg hosszabb sor esetén aggódik, hogy megjelenik a főnök, ezért gyorsabban dolgozik. Ezt úgy vehetjük figyelembe, hogy feltételezünk valami egyszerű w_{ki} alakot, ami tudja ezt az effektust, pl. (a legegyszerűbb változat) a ráta lineárisan nő a sor hosszával

$$w_{ki} = w_{ki}^0 (1 + \alpha n) \quad . \tag{9}$$

A bonyodalmat itt az átmeneti ráta n-függése okozza, s az adott esetben jól látható a dimenzió nélküli kis paraméter (α), amelyben majd sorbafejtünk.

Mit várunk? és mit akarunk kiszámolni?

Ha a pénztáros gyorsabban dolgozik a sor hosszának növekedésével, akkor nyilván az átlagos sorhossz $\langle n \rangle_\alpha$ rövidebb lesz az egzaktul megoldott $\alpha = 0$ esethez képest ($\langle n \rangle_\alpha < \langle n \rangle_0$). A számolásunk célja meghatározni a korrekciót. Reménykedünk, hogy az eredmény sorbafejthető α-ban, tehát valami hasonlót várunk

$$\langle n \rangle_\alpha - \langle n \rangle_0 \approx -\alpha F(q) \quad . \tag{10}$$

A master egyenlet, ami az előző előadás (1,2) egyenlete volt, most a következőképpen néz ki

$$\dot{P}_n(t) = -\left[w_{be} + w_{ki}^0(1+\alpha n)\right] P_n(t) + w_{be}P_{n-1}(t) + w_{ki}^0\left(1+\alpha(n+1)\right) P_{n+1}(t) \quad , \tag{11}$$

$$\dot{P}_0(t) = -w_{be}P_0(t) + w_{ki}^0(1+\alpha)P_1(t) \quad . \tag{12}$$

Az előző előadás lépéseit követve, leosztunk és átskálázzuk az időt w_{ki}^0-al, bevezetjük az átmeneti ráták hányadosát

$$q = \frac{w_{be}}{w_{ki}^0} \quad , \tag{13}$$

s megkapjuk az előző előadás (4,5) egyenleteinek az általánosítását

$$\dot{P}_n(t) = -(q+1+\alpha n)P_n(t) + qP_{n-1}(t) + (1+\alpha(n+1))P_{n+1}(t) \quad , \tag{14}$$

$$\dot{P}_0(t) = -qP_0(t) + (1+\alpha)P_1(t) \quad , \tag{15}$$

ahol az időderiváltak a w_{ki}^0 által dimenziótlanított idő szerinti deriváltakat jelenti.

Elsőre a stacionárius megoldást, P_n^e-t, keressük (a kurzuson belül ez másodikra is így marad), s az időderiváltakat a (14,15) egyenletekben nullává tesszük. így a megoldandó egyenletek a következők

$$0 = -(q+1+\alpha n)P_n^e + qP_{n-1}^e + (1+\alpha(n+1))P_{n+1}^e \quad , \tag{16}$$

$$0 = -qP_0^e + (1+\alpha)P_1^e \quad . \tag{17}$$

Látható, hogy a felgöngyölítéses módszer továbbra is használható. Az (17) egyenletből

$$P_1^e = \frac{q}{(1+\alpha)}P_0^e \quad , \tag{18}$$

s behelyettesítve ezt az eredményt (16)-be $n=1$ esetre, látható, hogy $P_2^e = q^2P_0^e/(1+\alpha)(1+2\alpha)$, s általában a rekurziót kielégíti a következő megoldás

$$P_n^e = \frac{q^n}{(1+\alpha)(1+2\alpha)...(1+n\alpha)}P_0^e \quad . \tag{19}$$

Ezek után a normalizáció feltételéből meghatározhatjuk P_0^e-t

$$P_0^e = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(1+\alpha)(1+2\alpha)...(1+n\alpha)}\right]^{-1} \quad . \tag{20}$$

Elvileg, ha van egy jó számítógépünk, akkor adott α-ra a P_0^e-t meghatározó összeg, valamint a P_n^e-ek tetszőleges pontossággal meghatározhatók, s numerikusan elkezdhetjük az átlagok számítását. A mi feladunk azonban a kis α viselkedés megtalálása, tehát az (19,20) egyenletekben első rendig sorbafejtünk α-ban. Kezdjük P_0^e számolásával

$$P_0^e = \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n - \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}q^n\right]^{-1} = \left[\frac{1}{1-q} - \alpha\frac{q}{(1-q)^3}\right]^{-1} = 1-q+\alpha\frac{q}{1-q} \quad . \tag{21}$$

Felhasználva ezt az eredményt a P_n^e formulában (19), α-ban lineáris rendig az alábbi kifejezést kapjuk

$$P_n^e = q^n \left(1 - \alpha \frac{n(n+1)}{2}\right)\left(1 - q + \alpha \frac{q}{1-q}\right) = q^n (1-q)\left[1 + \alpha\left(\frac{q}{(1-q)^2} - \frac{n(n+1)}{2}\right)\right]. \tag{22}$$

Tehát α rendig megkaptuk az eloszlásfüggvényt, s hozzáláthatunk az átlagos sorhossz kiszámításához:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n^e = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} n q^n \left[1 + \alpha\left(\frac{q}{(1-q)^2} - \frac{n(n+1)}{2}\right)\right]. \tag{23}$$

Az első tag a jobb oldali összegben nem más mint az átlagos sorhossz az $\alpha = 0$ esetben. A korrekciót leíró második tag könnyen számolható, a harmadik tag is, de azt egyszerűbb megnézni mondjuk a Wolframalfa-ban:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n q^n = \frac{q}{(1-q)^2} \qquad , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{q(2q+1)}{(1-q)^4} \qquad . \tag{24}$$

Behelyettesítve a fenti összegeket a (23) kifejezésébe, elérkezünk a keresett átlaghoz

$$\langle n \rangle_\alpha = \langle n \rangle_{\alpha=0} - \alpha \frac{q(2q+1)}{(1-q)^3} \qquad . \tag{25}$$

Milyen tanulságokat vonhatunk le az eredményből?

- Látjuk, hogy a stratégia működött, kis α-ra a sorfejtés elvégezhető.
- Első rendben a számunkra érdekes mennyiség aránylag nem túl nagy erőfeszítéssel számolható volt. De persze a magasabb rendek már nem ennyire barátságosak (próbálkozhatunk a másod renddel).
- Megnyugtató, hogy a várt eredményt kaptuk, a sor átlagos hossza csökken ha a pénztáros gyorsabban dolgozik ($\alpha > 0$) .
- A korrekció szinguláris a $q \to 1$ limeszben, ahol maga a nulladik közelítés is szinguláris, hiszen a sor átlagos hossza a végtelenhez tart. Ez egy elég általános tulajdonsága a sorfejtéseknek: a nulladik közelítés problémái megjelennek a sorfejtés együtthatóiban.

Kérdések: Mint láttuk az $\alpha = 0$ esetben, a sor hosszának a szórása minden q-ra nagyobb mint az átlagos sorhossz. Mit várunk, a szórás most nő, vagy csökken? Ki tudnánk számítani a szórás első rendű korrekcióját?

Ezzel befejeztük a sorfejtés témáját. A következő órán megvizsgáljuk, hogyan lehet a master egyenlet megoldását keresni úgy, hogy egyenleteket származtatunk a vátozók momentumaira, s különböző fizikai meggondolásokat (átlagtér elméletek) alkalmazunk az egyenletek közelítő megoldására.

A master egyenlet megoldási módszerei II

Az előadás célja.

Az eddigiekben megismertük a master egyenlet megoldásának három változatát, (1) a generátor függvény használatát, (2) a felgönygyölítéses módszert és (3) a sorfejtéses megoldást. Ma egy újabb, gyakran alkalmazott eljárást vizsgálunk meg, amelynek során egyenleteket írunk fel az eloszlásfüggvény alacsonyabb rendű momentumaira, s ezeket az egyenleteket próbáljuk megoldani. Azt ugye értjük, hogy a rendszer leírásában fontos szerepet játszanak az átlag és a fluktuáció, s az első két momentum pont ezeket a mennyiségeket szolgáltatja. Sajnos az egyenleteket megoldása során belefutunk abba a problémába, hogy az alacsonyabb rendű momentumok egyenletei tartalmazzák a magasabb rendűeket. Az egyenletek nem zártak, s valamilyen közelítő módszert kell kidolgozni a szétcsatolásukra. Egy ilyen szétcsatolási módszerrel, az ú.n. átlagtérelmélettel is megismerkedünk az alábbiakban.

Sorbanállás – egyenletek alacsonyabb rendű momentumokra.

Kezdjük az egzaktul megoldható sorbanállási problémával, amit az 5. előadásban kezdtünk tárgyalni, s ami a következő, már többször látott egyenletekkel írható le

$$\dot{P}_n(t) = -(1+q)P_n(t) + qP_{n-1}(t) + P_{n+1}(t) \qquad , \qquad n > 0 \quad . \tag{26}$$

$$\dot{P}_0(t) = -qP_0(t) + P_1(t) \quad , \tag{27}$$

ahol n a sor hossza és $q = w_{be}/w_{ki}$ pedig a sorba belépők és a pénztárnál kilépők rátájának hányadosa. A minket érdeklő alacsonyabb momentumok a következők

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t) \qquad , \qquad \langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) \quad . \tag{28}$$

A vonatkozó egyenleteket ugyanúgy kapjuk, mint a generátorfüggvény esetén. Kezdjük az átlaggal. Vegyük $\langle n \rangle$ időderiváltját, ami kifejezhető $P_n(t)$ időderiváltjain keresztül, amit azután kifejezünk a master egyenlet (26) jobb oldalán keresztül [vegyük észre, hogy a (28) összegekben az $n = 0$ tag eltűnik, tehát az összegzés $n = 1$-től indul, így az $n = 0$ egyenlet nem játszik szerepet]

$$\dot{\langle n \rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} n\dot{P}_n(t) = -(1+q)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) + q\sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} nP_{n+1}(t) \quad . \tag{29}$$

Most felhasználjuk a következő, a generátorfüggvényeknél már használt használt átalakításokat

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(t) = \langle n \rangle + 1 \tag{30}$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_{n+1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1}(t) = \langle n \rangle - 1 + P_0 \quad , \tag{31}$$

ahol felhasználtuk a eloszlásfüggvény normalizáltságát ($\sum_n P_n = 1$). Behelyettesítve a (30,31) kifejezéseket a (29) egyenletbe, az eredmény meglepő, mivel még ebben az egyszerű esetben sem kaptunk zárt egyenletet

$$\dot{\langle n \rangle} = q - 1 + P_0 \quad , \tag{32}$$

hiszen $P_0(t)$ időfüggését nem ismerjük, s ha megnézzük a $\dot{P}_0$-ra vonatkozó egyenletet (27), abban megjelenik P_1, s P_1 egyenletében P_2, s innentől megyünk a végtelenbe.

Amennyiben csak a stacionárius állapot iránt érdeklődünk, akkor a (32) egyenlet már hasznos információt ad, mivel a $\dot{\langle n \rangle} = 0$ egyenlet visszaadja a már ismert összefüggést

$$P_0^e = 1 - q \quad . \tag{33}$$

A továbbiakban a stacionárius állapot tulajdonságaira korlátozzuk vizsgálatainkat, s következő lépésként megnézzük, hogy mit kapunk a második momentum egyenletéből

$$\dot{\langle n^2 \rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \dot{P}_n(t) = -(1+q) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t) + q \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_{n-1}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_{n+1}(t) \quad . \tag{34}$$

A jobb oldal összegeit az előzőek szerinte alakítgatjuk, amíg elérkezünk egy olyan formáig, amiben (reményeink szerint) csak $\langle n \rangle, \langle n^2 \rangle$ és P_0 szerepel. Az első összeg nem más, mint $\langle n^2 \rangle$. A második összeg pedig a következőképpen írható

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_{n-1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^2 P_{n-1}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) P_{n-1}(t) = \tag{35}$$

$$= \langle n^2 \rangle + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_{n-1}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(t) = \langle n^2 \rangle + 2\langle n \rangle + 1 \quad , \tag{36}$$

s a harmadik összeg is probléma nélkül számolható

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_{n+1}(t) = \langle n^2 \rangle - 2\langle n \rangle + 1 - P_0 \quad . \tag{37}$$

Összegyűjtve az összegekre vonatkozó eredményeket a (34) egyenlet jobb oldalán, azt láthatjuk, hogy az $\langle n^2 \rangle$ tagok kiejtik egymást, s cak az első momentum és P_0 marad

$$\dot{\langle n^2 \rangle} = 2(q-1)\langle n \rangle + 1 + q - P_0 \quad . \tag{38}$$

Az egyenlet továbbra sem zárt, mivel P_0-ra továbbra sem tudunk zárt egyenletet felírni. Ha a stacionárius állapotot vizsgáljuk, akkor ismét érdekes az eredmény, hiszen az $\dot{\langle n^2 \rangle} = 0$ egyenlet megadja n átlagát $\langle n \rangle^e$-t:

$$\dot{\langle n^2 \rangle} = 0 = 2(q-1)\langle n \rangle^e + 1 + q - P_0^e \qquad \rightarrow \qquad \langle n \rangle^e = \frac{q}{1-q} \quad , \tag{39}$$

ahol felhasználtuk, hogy $P_0^e = 1 - q$ (6).

Tovább folytatva a fenti gondolatmenetet, felírhatnánk az egyenletet $\dot{\langle n^3 \rangle}$-re, s azt találnánk, hogy az egyenlet jobb oldala csak $\langle n^2 \rangle, \langle n \rangle$ és P_0-t tartalmazza, s a stacionaritási feltétel $\dot{\langle n^3 \rangle} = 0$ meghatározza $\langle n^2 \rangle^e$-t. Itt azonban megállunk, s megelégszünk azzal, hogy megtanultuk, hogyan kell a momentumokra vonatkozó egyenleteket származtatni. A továbbiakban egy ismerős, de új elemmel bonyolított problémát vizsgálunk, amelyen demonsrálni lehet egy sokat használt módszert, az u.n. átlagtér elmélet közelítést.

A hegymászó problémája – átlagtér közelítés.

A egyik házi feladatukban már megismerkedhettek a hegymászás dinamikájával, ami igazából ekvivalens a sorbanállás problémájával. A hegymászó az $n = 0$ szintről indul felfelé, egyesével véve a fokokat (szinteket) w rátával. A házi feladatban minden lépésnél megvolt a lehetősége az előző szintre való visszacsúszásnak (w_0 rátával). Most megváltoztajuk ez utóbbi szabályt. Azt mondjuk, hogy a hegy meredek, s ha egyszer a hegymászó megcsúszott, akkor lecsúszik az indulási pontba (szintén w_0 rátával), s onnan indul újra. Ezen túl, még egy változtatást végzünk, amivel szintén a valósághoz igyekszünk közelíteni. Feltételezzük, hogy a magasabbra jutva a hegymászó egyre fáradtabb, azaz magassággal nő a csúszás rátája, méghozzá línearisan: $w_0 \to w_0(1 + \alpha n)$.

Már elég tapasztaltak vagyunk a master egyenletek felírásában, úgyhogy nem okozhat nehézséget felírni az egyenletet annak a valószínűségére, $P_n(t)$, hogy a fenti hegymászó az n-edik szinten van

$$\dot{P}_n(t) = -\left[w + w_0(1 + \alpha n)\right] P_n(t) + wP_{n-1}(t) \quad , \quad n > 0 \quad , \tag{40}$$

$$\dot{P}_0(t) = -wP_0(t) + w_0 \sum_{n=1}^{\infty}(1 + \alpha n)P_n(t) \quad . \tag{41}$$

A felső egyenlet jobb oldalán az első tag reprezentálja az n-edik állapotból való felfelé lépést, plusz a lecsúszást, a második tag pedig az n-edik állapotból történő felfelé lépést. A lenti egyenlet jobb oldalán az első tag az $n = 0$ szintről a felfelé lépést írja le, a második pedig az $n > 0$ szintekről a visszaesést.

Szokás szerint, leosztva w_0-al és átskálázva az időt w_0-al, majd bevezetve az átmeneti ráták hányadosát ($q = w/w_0$), megkapjuk az egyenletek valamivel áttekinthetőbb változatát

$$\dot{P}_n(t) = -(q + 1 + \alpha n)P_n(t) + qP_{n-1}(t) \quad , \tag{42}$$

$$\dot{P}_0(t) = -qP_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}(1 + \alpha n)P_n(t) \quad . \tag{43}$$

További növeli az átláthatóságot, ha észrevesszük, hogy az alsó egyenletben szereplő összeg a következőképpen írható $\sum = 1 - P_0 + \alpha\langle n\rangle$, tehát az egyenleteink végső formája

$$\dot{P}_n(t) = -(q + 1 + \alpha n)P_n(t) + qP_{n-1}(t) \quad , \tag{44}$$

$$\dot{P}_0(t) = -(q + 1)P_0(t) + 1 + \alpha\langle n\rangle \quad . \tag{45}$$

Kövessük most az előző fejezetben kidolgozott módszert, s deriváljuk az első momentum ($\langle n\rangle$ – a hegymászó átlagosan elért magassága) dinamikáját leíró egyenletet

$$\dot{\langle n\rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} n\dot{P}_n(t) = -(1 + q)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) - \alpha\sum_{n=1}^{\infty} n^2P_n(t) + q\sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}(t) \quad . \tag{46}$$

A jobb oldalon álló összegek $\langle n\rangle$, $\langle n^2\rangle$, és $(1+\langle n\rangle)$-nel egyenlők, tehát a következő egyenletet kapjuk

$$\dot{\langle n\rangle} = -\langle n\rangle + q - \alpha\langle n^2\rangle \quad . \tag{47}$$

Itt futottunk bele az előrejelzett nehézségbe, hogy az $\langle n\rangle$ egyenlete tartalmaz magasabb rendű momentumot (adott esetben $\langle n^2\rangle$-et), s ha megpróbáljuk megoldani a problémát azzal, hogy deriváljuk az $\langle n^2\rangle$-re vonatkozó egyenletet, akkor ott szintén megjelenik egy magasabb rendű momentum. Minden számolás nélkül (de szeretném, ha ellenőriznék az eredményt), a mi esetünkben a következő egyenletet kapjuk

$$\dot{\langle n^2\rangle} = -\langle n^2\rangle + 2q\langle n\rangle + q - \alpha\langle n^3\rangle \quad . \tag{48}$$

Tehát nem kapunk egy zárt egyenletrendszert az alacsony momentumokra, s valójában az egyenletrendszer végtelen sok egyenletből áll. Mivel minden, a valósághoz valamennyire is közel álló rendszerben hasonló a helyzet, a kérdés az, hogyan lehet fizikai alapokon nyugvó közelítő módszereket kidolgozni.

Egy nagyon egyszerű közelítés az u.n. átlagtér közelítés. Ezt a közelítést a fizikában sok helyen alkalmazzák, s mindenütt másképp mondják el a lényegét, s emiatt enyhe misztikum övezi. A lényeg valójában egyszerű, feltételezzük, hogy a rendszer fluktuációi kicsik. Mit jelent ez a mi (47) egyenletünk esetén? írjuk az egyenletet a következő alakban

$$\dot{\langle n\rangle} = -\langle n\rangle + q - \alpha(\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2) - \alpha\langle n\rangle^2 \quad . \tag{49}$$

Látható, hogy az átlagos magasságot leíró egyenletben megjelent az átlagos magasság fluktuációja $(\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2)$, s ha erről feltételezzük, hogy kicsi és elhanyagolható, akkor zárt egyenletet kapunk $\langle n\rangle$-re

$$\dot{\langle n\rangle} = -\langle n\rangle + q - \alpha\langle n\rangle^2 \quad . \tag{50}$$

Ez az egyenlet megoldható, a stacionáris megoldás megkapásához egy másodfukú egyenletet kell megoldanunk $[-\langle n\rangle^e + q - \alpha(\langle n\rangle^e)^2 = 0]$, s a stacionáris állapothoz relaxálás ideje is könnyen meghatározható a stacionárius állapot körüli línearizálás segítségével.

A kérdés itt az, hogy miképp lehet megbizonyosodni a közelítés megbízhatóságáról. Mindig lehet nézni olyan limeszt (adott esetben pl. $\alpha \to 0$), ahol egzakt eredményekkel lehet összehasonlítani a közelítés eredményét. Ezen túl, általában lehet szimulációkat végezni, s más tartományokban is elvégezni az összehasonlítást. De a közelítés keretein belül is lehet tovább menni, s megvizsgálni a következő (48) egyenletet, s ott is kitalálni, hogyan lehet a magasabb rendű $\langle n^3\rangle$-öt alacsonyabb rendű momentumokon keresztül közeliteni. Az így kapott egyenlet megoldása megadja $\langle n^2\rangle$-et, tehát megvizsgálható, hogy $\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2$ valóban elhanyagolható-e. Mindez végigvihető lenne a hegymászás példáján, de az előadás fő célja itt az volt, hogy demonstráljam a master egyenlet egy megoldási, valamint közelítő megoldási módszerét, amely momentumok dinamikájának az analízisén alapul.

Születési-kihalási problémák.

Az egyszerűbb születési-kihalási folyamatok nagyban hasonlítanak az előzőleg vizsgált sorbanállási és hegymászási dinamikára. De azért vannak különbségek is. Képzeljük el, hogy egy réten élő egerek számát (n) követjük. Ha elég kis időintervallumokat használunk, akkor az egerek száma két számolás között maximum eggyel nő ($n \to n+1$), vagy csökken ($n \to n-1$), aszerint, hogy egy új egér született, vagy a réti sas elvitt egyet közülük. Ha megmérjük a születési és elhalálozási rátát ($w_{n+1,n}$, illetve $w_{n-1,n}$), akkor a felírt master egyenlet látszólag megegyezik a sorbanállással kapcsolatban kapottakkal. Az élőlények esetén természetesen az $n = 0$ határ speciális, hiszen új élőlény nem keletkezik a semmiből, s az $n = 0$ elérése a kihalást jelenti. Ez a kihalás történhet fluktuáció eredményeképp, vagy a dinoszauruszok esetén meteor becsapódása okán (a hegymászó lecsúszásának megfelelő tag a master egyenletben). Persze, ha már az egereket hoztuk fel példának, akkor az egérpopuláció kihalhat egy réten, de azért nagy valószínűséggel ismét megjelennek a szomszédos rétekről való bevándorlással. Ami csak azt jelenti, hogy valóságban történő események leírása során mindig komolyan el kell gondolkodni határfeltételekről.

Legközelebb a hálózatok növekedésének master-egyenlet leírásával kezdünk foglalkozni.