

## Hálózatok: Fokszámeloszlás master egyenletből (I)

### Az előadás célja.

Az eddigiek során elsősorban a master egyenlet stacionárius megoldásai iránt érdeklődtünk. A következő két előadáson, hálózatnövekedési problémákat vizsgálva, a dinamikára koncentrálunk. A feladat nem az lesz, hogy elmélyüljünk a hálózat tudományban, hanem az, hogy példákat lássunk arra, hogy egyszerű (néha nem is olyan egyszerű) növekedési dinamikák leírásában hogyan segíthet a master egyenlet megközelítés, s hogyan alkalmazhatjuk és általánosíthatjuk az eddig tanult megoldási módszereket. Persze közben azért megértünk valamit a hálózatokról is.

A vizsgálendő példák jól ismert alapproblémái a hálózat tudománynak:

1. Erdős-Rényi gráf létrehozása növekedési dinamikával,
2. Véletlen rekurzív háló növekedése,
3. Preferenciális csatolódás dinamikája (Barabási).

Mielőtt ismertetnénk a fenti modellek részleteit, pár szó a hálózatokról általában.

### Hálózatok a természetben és legegyszerűbb leírásuk.

Hálózatokról nyilván hallottak. A téma az utóbbi két évtizedben népszerű volt fizikus körökben, s a tudományterület fejlődésében fizikusok (mint pl. Barabási László) jelentős szerepet játszottak. A természet tele van hálózatokkal. A járvány okán manapság az érdeklődés középpontjában áll a Fig.1-en látható a tüdő hörgő-hörgöcske-tüdőhólyagocska fraktálszerű hálózata. A koronavírus általi fertőzés ennek a hálózatnak a működését teszi tönkre gyulladások okozásával, s ezzel párhuzamosan a légzőfelület beszűkítésével.

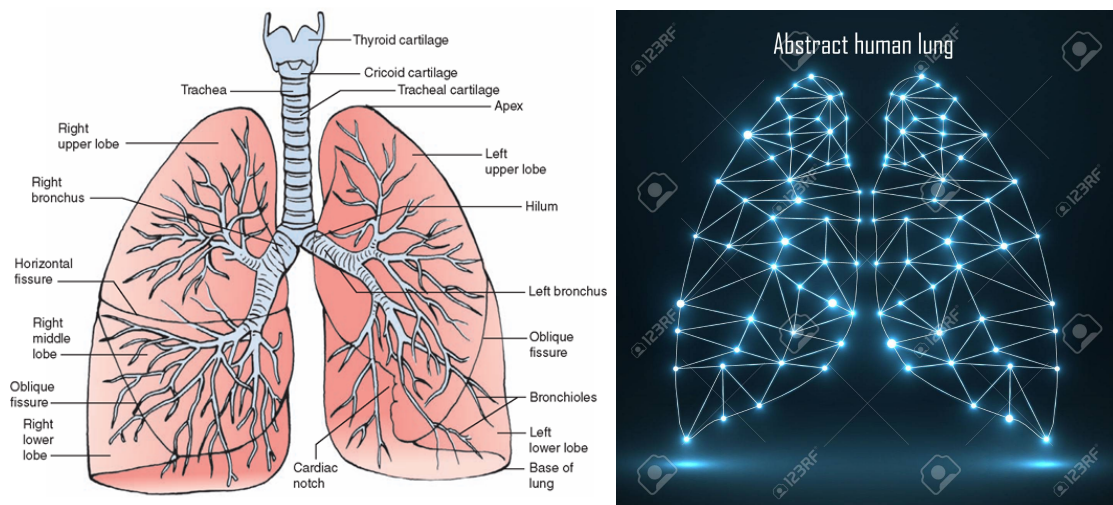


FIG. 1: A tüdő struktúrája és annak egy hálózat modellje.

A Fig.1 ábra jobb oldalán a tüdő légjóratainak egy elég egyszerű (nem túlságosan fraktál-szerű) modellje látható, amelyen a fénylő pontok (csúcsok) a hálózat fő elágazási pontjait jelölik, míg az összekötő vonalak (élek) a levegő útját mutatják. A hálózatok legegyszerűbb leírása ezeknek a csúcsoknak és éleknek a jellemzéséből áll, s mi is ezen a szinten maradunk. A kérdés, ami ezen a szinten felmerül, az az, hogy hogyan jönnek létre a képen látható csúcsok és élek a tüdő kifejlődése során. Hasonló kérdések merülnek fel az ember érhálózatának kifejlődésével kapcsolatban, de az út-, repülőgépjárat-, internet-, mobil-, üzlettárs hálózatok kialakulásának legegyszerűbb megértése is a "csúcs-él" modellek segítségével történik.

Csúcs-él leírás jellemzői.

Legegyszerűbb esetben a csúcsoknak és éleknek nincsenek extra tulajdonságai. Tehát pl. a Fig.1 tüdő modelljében minden csúcs ugyanolyan fényes, s az összekötő éleknek sincs vastagságuk, két csúcs között az él vagy ott van, vagy nincs. Mi marad akkor jellemzésre?

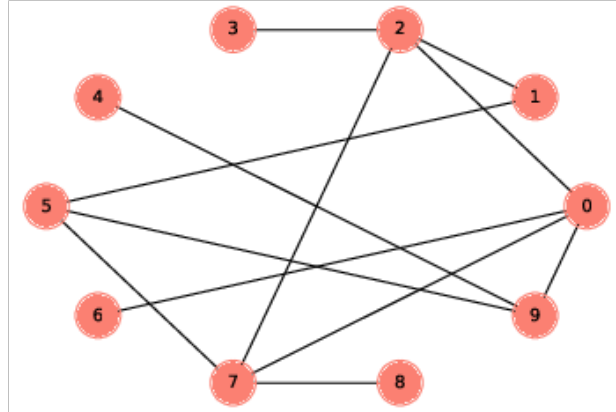


FIG. 2: Csúcs-él hálózat. Sem a csúcsoknak, sem az éleknek nincsenek belső tulajdonságaik (nagyság, vastagság, stb.).

Minden csúcsnak van egy indexe  $i$ , s fontos jellemzője, hogy hány ( $k_i$ ) másik csúccsal van összekötve. Tehát pl. Fig.2-t nézve látjuk, hogy  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 3$ ,  $k_3 = 1$ , stb. A  $k$  számot nevezzük a csúcs fokszámának, s  $N_k$ -val jelöljük a  $k$  fokszámú csúcsok számát. Amennyiben  $N$  a hálózat csúcsainak száma (Fig.2-n  $N = 10$ ), akkor  $N_k/N$  a rendszer fokszámeloszlását ( $P_k$ ) adja, hiszen ha véletlenszerűen kiválasztunk egy csúcsot, akkor

$$P_k = \frac{N_k}{N} \quad (1)$$

egyenlő annak a valószínűségével, hogy a kiválasztott csúcs fokszáma  $k$ . Az átlagos fokszám  $\langle k \rangle$  a hálózatok fontos jellemzője, s ha ismerjük  $P_k$ -t, akkor könnyen számíthatjuk

$$\langle k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k \quad , \quad (2)$$

s  $k$  fluktuációi  $\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$  is meghatározhatók.

Mi a továbbiakban a fokszámeloszlással foglalkozunk, de hangsúlyoznunk kell, hogy még a legegyszerűbb csúcs-él modelleknek is vannak egyéb, jobban a részletekbe menő jellemzői. Ilyen például az u.n. szomszédsági mátrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix} \quad (3)$$

aminek  $A_{i,j}$  eleme 1, ha az  $i$  és  $j$  csúcsok össze vannak kötve, s  $A_{i,j} = 0$  egyébként (a fenti mátrix a Fig.2 ábrán levő hálózat szomszédsági mátrixa). Ugyancsak érdekes lehet a csúcsok korrelált összekötöttsége, az u.n. kommunális struktúra a hálózaton belül. Ezek a részletek már a hálózattudomány mélyebb rétegei, ahová mi nem merülünk le.

*Megjegyzés a növekedési dinamika változatairól.*

A bevezetőben említett 1-3. problémák a "csúcs-él" hálózatok növekedési dinamikája szempontjából két osztályba sorolhatók.

- A csúcsok száma fix és csak az élek száma nő (1. probléma).
- Mind a csúcsok, mind pedig az élek száma nő (2-3. probléma).

### 1. Erdős-Rényi hálózat tulajdonságai növekedési dinamikából.

Az Erdős-Rényi gráf  $N$  csúcsból áll, s két csúcs véletlenszerűen, adott valószínűséggel van összekötve. Mi ezt a gráfot dinamikai folyamat eredményeként építjük fel, s hálózatként interpretáljuk. Hogy könnyebb legyen megérteni a folyamatot, képzeljük el, hogy a nyári táborba megérkezik  $N$  egymást nem ismerő gyerek. A gyerekek (a hálózat csúcsai) elkezdnek ismerkedni, s barátságok szövődnek, amire mi az  $N$  csúcs között megjelenő élekként tekintünk. Az Erdős-Rényi esetben a kérdés az, hogy ha ezek a barátságok véletlenszerűen szövődnek (valamilyen rátával), akkor két hét múlva mi lesz a gyerekek "barátságsszám" eloszlása, azaz milyen valószínűséggel lesz  $k$  barátja egy gyereknek.

Mit várunk? Egy átlag körüli éles eloszlást, vagy egy exponenciális? Esetleg egy hatványszerű eloszlást?

Tehát, precízebben megfogalmazva,  $N$  csúccsal indulunk, él nincs a rendszerben. Ezután elkezdjük véletlenszerűen összekötni csúcsokat, s az élek lerakásának rátáját úgy választjuk, hogy egységnyi idő alatt  $N/2$  új él jelenjen meg a rendszerben. Az  $N/2$ -t úgy választottuk, hogy egységnyi idő alatt átlagban minden csúcs kapjon egy élt. Világos, hogy a lerakott élek száma  $t$  idő alatt  $Nt/2$ , s könnyű kiszámítani az átlagos fokszámot is

$$\langle k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{N_k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\infty} k N_k = \frac{2 * \text{élek száma}}{N} = t \quad , \quad (4)$$

ahol az utolsó előtti egyenlőségnél kihasználtuk, hogy minden él 2 csúcshoz tartozik, tehát, ha leszámoljuk a csúcsokból kiinduló éleket ( $\sum_{k=1}^{\infty} k N_k$ ), akkor az élek számának a kétszeresét kapjuk, továbbá az utolsó egyenlőségnél pedig felhasználtuk, hogy a  $t$  idő alatt lerakott élek száma  $Nt/2$ .

Bár az átlagos fokszám számolása ebben az esetben triviális, a fokszámeloszlás számolása már erőfeszítést igényel.

*Master egyenlet a fokszámeloszlásra*

Írjuk fel a  $k$  fokszámú csúcsok számának  $N_k$  megváltozását  $\Delta t$  idő alatt

$$N_k(t + \Delta t) = N_k(t) + N_{k-1}(t)\Delta t - N_k\Delta t \quad . \quad (5)$$

Az egyenlet jobb oldalán az első tag érthető. A következő tag megértéséhez emlékezzünk arra, hogy az új élek hozzáadásának rátája úgy lett megválasztva, hogy egységnyi idő alatt átlagban minden csúcs 1 új élt kap. Mivel  $N_{k-1}$  olyan csúcs van, amiből  $k-1$  él megy ki, s ezek mind kapnak egy új élt,  $\Delta t$  idő alatt a  $k$  élű csúcsok számának növekedése  $N_{k-1}(t)\Delta t$ . Az utolsó tag hasonló magyarázattal a  $k$  élű csúcsok számának csökkenését adja. Leosztva  $\Delta t$ -vel, a  $\Delta t \rightarrow 0$  limesz a következő egyenletre vezet

$$\dot{N}_k = N_{k-1} - N_k \quad . \quad (6)$$

Nem szabad elfeledkezni a határról, a  $k = 0$  esetről sem. A  $k = 0$  csúcsok száma csak csökkenhet, s a csökkenés arányos az él nélküli csúcsok számával,  $N_0$ -val. Megismételve a (6) egyenletre vezető érveket, a következő egyenletet kapjuk

$$\dot{N}_0 = -N_0 \quad . \quad (7)$$

Mivel a csúcsok száma  $N$  időben nem változik, ezért a (6) és (7) egyenleteket leoszthatjuk  $N$ -nel, s mivel  $P_k = N_k/N$ , a fenti egyenletek valójában a fokszámeloszlásra vonatkoznak

$$\dot{P}_k = P_{k-1} - P_k \quad (8)$$

$$\dot{P}_0 = -P_0 \quad . \quad (9)$$

Ezeknek az egyenletek megoldását a generátorfüggvény módszerrel keressük, de most nem a stacionárius állapot, hanem a teljes időfüggés érdekel bennünket. A már ismert definíciót használjuk

$$G(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} P_k(t) \quad . \quad (10)$$

A master egyenlet segítségével a  $G(s, t)$  időderiváltja a következőképpen írható

$$\dot{G}(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} \dot{P}_k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-sk} P_{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} P_k = e^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-s(k-1)} P_{k-1} - G = (e^{-s} - 1)G \quad . \quad (11)$$

A fenti egyenlet megoldása

$$G(s, t) = C e^{(e^{-s}-1)t} \quad , \quad (12)$$

s a normalizációs feltételből,  $G(s=0, t) = 1$ , következik  $C = 1$ , azaz először sikerült a generátorfüggvény teljes időfüggését meghatározni

$$G(s, t) = e^{(e^{-s}-1)t} \quad . \quad (13)$$

Sorbafejtve az  $e^{e^{-s}t}$ -t, a generátorfüggvény olyan alakot vesz fel, ami összehasonlítható a (10) definícióval

$$G(s, t) = e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} \frac{t^k}{k!} \quad , \quad (14)$$

s az összehasonlításból leolvasható a fókuszeloszlás

$$P_k(t) = e^{-t} \frac{t^k}{k!} \quad . \quad (15)$$

Amit kaptunk, az nem más, mint a Poisson eloszlás, amiről ismert, hogy a szórás-négyzet egyenlő az átlaggal. Tehát, mivel tudjuk, hogy  $\langle k \rangle = t$ , ezért

$$\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \langle k \rangle = t \quad . \quad (16)$$

Az is ismert, hogy nagy időkre a Poisson eloszlás a Gauss eloszlásba megy át, mint az felismerhető az alábbi Fig.3-on ( $t > 10$ -re a Gauss eloszlás igen jó közelítés).

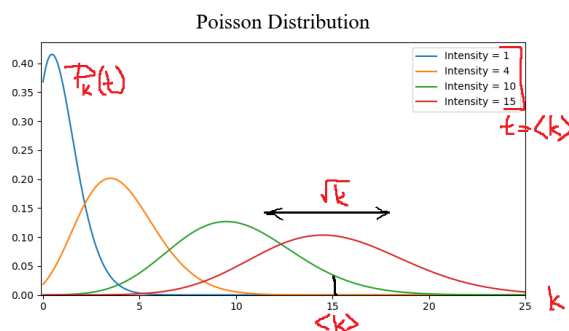


FIG. 3: Poisson distribution időbeli változása.

Tehát mit is kaptunk? Azt kaptuk, hogy ha a barátok (élek) véletlenszerűen választódnak, akkor majdnem mindenkinek (majdnem minden csúcsnak) ugyanannyi  $\langle k \rangle$  barátja (éle) van, s a szórás ekörül az átlag körül  $\sqrt{\langle k \rangle}$  nagyságrendű. Természetesen ez az eredmény az Erdős-Rényi gráfokra már ismert volt.

*A barátok választása azonban nem mindig teljesen véletlenszerű. Legközelebb megnézzük, hogy a 2. és 3. számú hálózatonövekedési folyamatok barátkozási interpretációi milyen eloszlásokra vezetnek.*

## Hálózatok: Fokszámeloszlás master egyenletből (II)

### Az előadás célja.

Folytatjuk a hálózatnövekedési problémák vizsgálatát. Továbbra is a dinamikára koncentrálnunk, s továbbra is a master egyenlet megközelítést használjuk a hálózat fokszámeloszlásának leírására. Az előző óra bevezetésében vázolt három hálózat tudományi alapproblémából kettő maradt (az Erdős-Rényi gráf volt az előző előadás témája)

2. Véletlen rekurzív háló növekedése,
3. Preferenciális csatolódás dinamikája (Barabási).

A fenti példák újabb hálózatokkal (és barátkozási dinamikákkal) ismertetnek meg bennünket, s egyben segítenek a master egyenlet megoldási módszereinek bővítésében.

### Véletlen rekurzív háló növekedése

A egyik házi feladatban már megismerkedhettek a véletlen rekurzív háló (véletlen rekurzív fa) növekedésével. Amennyiben barátkozási analógiát használunk, akkor ismét a nyári táborba érkező gyerekeket tudjuk példának felhozni. Az Erdős-Rényi dinamikához viszonyítva (ahol a gyerekek egyszerre érkeztek, s páronként véletlenszerűen létesültek a barátságok) a különbség most az, hogy a gyerekek nem egyszerre, hanem egymás után érkeznek, s minden érkező gyerek egy barátot választ véletlenszerűen a már ottlevők közül. Látszólag nem nagy a különbség, de ha belegondolunk, akkor lényegi változás az, hogy az első gyerek nem választhat, a második is csak a már ottlevő egyet, a harmadik már választ véletlenszerűen a kettő közül, s ahogy nő a gyerekek száma úgy nő az újonnan érkező választási lehetőségeinek a száma. Mint látjuk majd, ez lényegesen más fokszámeloszlásra vezet, ami egy kicsit érthető is, ha észrevesszük, hogy az első érkezőket sokan választhatják, tehát fokszámuk lényegesen magasabb, mint az utolsóknak, akik ugyan választhatnak barátot, de őket már kis valószínűséggel fogják választani.

Az alábbi Fig.4 mutatja a véletlen rekurzív háló generálását. Minden lépésben egy új csúcs kapcsolódik a meglévő hálózat egyik csúcsához, s hálózat csúcsai egyenlő valószínűséggel versengenek az él másik végéért. Tehát, indulunk egy csúccsal. A 2. csúcs csak ehhez kapcsolódhat. A 3. érkező csúcs már választ (egyenlő  $1/2-1/2$  valószínűséggel) a meglévő kettő között, s a 4. már  $1/3-1/3-1/3$  valószínűséggel csatolódik a hálózat 3 csúcsához, ahogy szemléletesen látható a Fig.4-en. Ugyanitt látható a 9. csúcs csatolódása utáni helyzet, valamint az is, hogy az elsőre bonyolultnak tűnő hálózat hogyan rendezhető át fa struktúrába, követve azt, hogy egy csúcs hány élnyi távolságra van a kiinduló csúcstól.

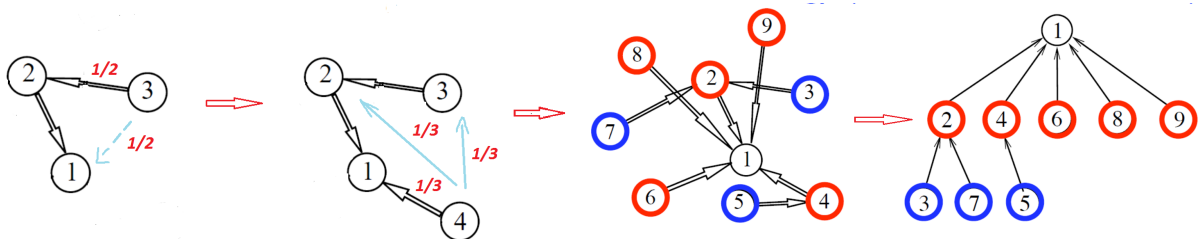


FIG. 4: Véletlen rekurzív hálózat generálása és reprezentációja fa struktúráként.

A fokszámeloszlás véletlen rekurzív háló fontos jellemzője, amit a következőkben összehasonlítunk az előző órán az Erdős-Rényi hálózatra kapottakkal.

### Master egyenlet a fokszámeloszlásra

A véletlen rekurzív háló esetében a csúcsok száma ( $N$ ) játssza az idő ( $t$ ) szerepét, s az időnövekmény  $\Delta t$  pedig 1 (persze olyan modell is elképzelhető, amelyben a csúcsok érkezésének a rátája függ pl. a meglévő hálózat nagyságától, de mi a legegyszerűbb esettel foglalkozunk). Egy új csúcs beérkezésekor két dolog történik. Egyrészt az új csúcs (saját magaként) növeli az egy éllel rendelkező csúcsok számát  $[N_1(N+1) \rightarrow$

$N_1(N+1)$ . Másrészt pedig egyenlő,  $1/N$  valószínűséggel növeli bármelyik csúcs éleinek számát. Mindez a  $k$  fokszámú csúcsok számára,  $N_k$ -ra, a következőket jelenti

$$N_k(N+1) = N_k(N) + \frac{1}{N}N_{k-1}(N) - \frac{1}{N}N_k(N) \quad , \quad k > 1 \quad (17)$$

$$N_1(N+1) = N_1(N) - \frac{1}{N}N_1(N) + 1 \quad . \quad (18)$$

Az első egyenletben a  $-N_k/N$  a  $k$  fokszámú csúcsok csökkenését írja le, mivel  $1/N$  a valószínűsége annak, hogy egy  $k$  fokszámú csúcshoz jön be az új él, s  $N_k$  ilyen csúcs van. Hasonló megfontolásból, a  $N_{k-1}/N$  a  $k$  fokszámú csúcsok növekedését adja. A második egyenlet jobb oldalán az 1-es írja le az 1 éllel rendelkező új csúcs megjelenését, a  $-N_1/N$  tag pedig érthető az első egyenletben szereplő  $-N_k/N$  tag magyarázatából.

Nagy  $N$ -re a fenti egyenletekben használjuk a  $N_k(N+1) - N_k(N) = dN_k/dN$  sorfejtést

$$\frac{dN_k}{dN} = \frac{N_{k-1}}{N} - \frac{N_k}{N} \quad , \quad k > 1 \quad (19)$$

$$\frac{dN_1}{dN} = -\frac{N_1}{N} + 1 \quad . \quad (20)$$

Ettől a ponttól többféleképpen mehetünk tovább, s itt tanulunk valamit a master egyenlet megoldási módszereiről. Egy lehetséges "fizikai" gondolat azon alapul, hogy a fokszámok összege minden lépésben 2-vel nő (+1 az új csúcsnál és +1 valamelyik már meglévő csúcsnál)

$$\sum_{k=1}^{\infty} kN_k = 2N - 2 \quad . \quad (21)$$

Amennyiben feltételezzük, hogy a fenti összegbe a fő járulékot  $N_k$  véges  $k$  tartományból adja, akkor ebből az következik, hogy  $N_k \sim N$ . A szorzó faktor viszont nem más, mint a fokszámeloszlás  $P_k$ , hiszen  $P_k = N_k/N$  definíció szerint. Tehát, ha nagy  $N$ -re  $N_k \sim N$ , akkor  $P_k$  függetlenné válik  $N$ -től, ami azt jelenti, hogy a hálózat nő,  $N_k$ -k is nőnek, de a fokszámeloszlás  $P_k$  stacionáriussá válik. A fenti feltételezést alkalmazva a (20) egyenletekre, a következőt kapjuk

$$\frac{d(P_k N)}{dN} = P_k = \frac{P_{k-1}N}{N} - \frac{P_k N}{N} = P_{k-1} - P_k \quad , \quad k > 1 \quad (22)$$

$$\frac{d(P_1 N_1)}{dN} = P_1 = -\frac{P_1 N}{N} + 1 = -P_1 + 1 \quad , \quad (23)$$

azaz

$$P_k = P_{k-1} - P_k \quad \rightarrow \quad P_k = P_{k-1}/2 \quad (24)$$

$$P_1 = -P_1 + 1 \quad \rightarrow \quad P_1 = 1/2 \quad . \quad (25)$$

A fenti rekurzio megoldása láthatóan

$$P_k = \frac{1}{2^k} = e^{-(\ln 2)k} \quad . \quad (26)$$

Tehát exponenciálisan lecsengő fokszámeloszlást kaptunk, ami elfogadhatóvá teszi feltételezésünket, hogy a (21) összegbe a  $N_k = P_k N$  fokszámok  $k$  véges tartományából jönnek.

Az eredmény részben meglepő. Ha kiszámítjuk az átlagos élszámot a (26) eloszlásfüggvénnyel, akkor  $\langle k \rangle = 2$ -t kapunk, s  $P_1 = 1/2$ , ami a barátság interpretációjában azt jelenti, hogy a gyerekek felének csak egy barátja lesz és 4 barát valószínűsége már csak  $1/16 \approx 0.06$ .

Összehasonlítva az eredményt az Erdős-Rényi hálózatra kapottakkal, azt láthatjuk, hogy a fő különbség onnan ered, hogy míg az Erdős-Rényi folyamatban az átlagos fokszám a hálózatnövekedés során egyre nő ( $\langle k \rangle_{ER} \sim t$ ), addig a véletlen rekurzív hálózatban ez a szám állandó ( $\langle k \rangle_{VR} \sim 2$ ). Mindkét dinamika közel egyenlő arányban osztja szét a éleket (a barátságokat), az átlag viszont különböző.

A valóságban rendszerint kevésbé szociálisan érzékeny barátságeloszlást találunk, néhány embernek nagyon sok barátja van, sokaknak pedig kevés. Valami hasonlót produkál a preferenciális csatolódás dinamikája, amit a következő fejezetben tárgyalunk.

### Preferenciális csatolódás dinamikája (Barabási).

A folyamat leírását kezdjük ismét a barátkozási analógiával. A nyári táborba a gyerekek egymás után érkeznek, s minden érkező gyerek egy barátot választ a már ottlevők közül. A különbség a véletlen rekurzív dinamikától az, hogy a választás nem véletlenszerű. Az érkező gyerek (csúcs) megnézi, hogy kinek hány barátja (éle) van, s a népszerűbb gyerekek közül választ, azaz egy adott választás valószínűsége arányban áll az adott gyerek barátjainak számával. Világos, hogy ez a dinamika olyan barátság (fokszám) eloszlást generál, amelyben nagyobb súllyal lesznek a sok baráttal rendelkező gyerekek.

Mi a legegyszerűbb esetet fogjuk vizsgálni, amit lineáris preferenciális csatolódásnak hívnak. Ez esetben az újonnan megjelenő csúcs egy  $k$  éllel (baráttal) rendelkező csúcshoz  $p_{csat}(k) = Ak$  valószínűséggel csatolódik. Itt  $A$  a normalizációs faktor, ami abból következik, hogy egy lépésben a bejövő csúcs kapcsolatotot létesít valamelyik meglévő csúcscsal,  $\sum_1^N AkN_k = 1$ . Mivel a fokszámok összege most is  $\sum_1^N kN_k = 2N - 2$ , egy  $k$  élű csúcshoz csatolódás valószínűsége nagy  $N$ -re

$$p_{csat}(k) = \frac{k}{2N - 2} \approx \frac{k}{2N} . \quad (27)$$

(Megjegyzés: a preferencia vagy antipreferencia különböző fokú lehet, s ezt lehet modellezni olyan csatolási valószínűséggel, ami  $p_{csat} = Ak^\beta$  alakú, s ahol  $\beta$  lehet pozitív és negatív is.)

Fig.5 mutatja a csatolódási valószínűségeket a 3. és 4. csúcs érkezésekor lineáris preferencia esetén (hasonlítsuk össze az ábrát Fig.4-gyel).

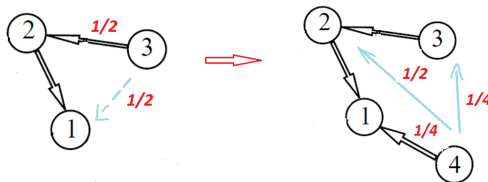


FIG. 5: Lineáris preferenciális hálózat generálásának első lépései

### Master egyenlet a fokszámeloszlásra lineáris preferenciális hálózatban

A master egyenlet felírásának logikája ugyanaz, mint a véletlen rekurzív hálózat esetén. Az új csúcs az 1-es fokszámú csúcscokhoz ad egyet, s  $p_{csat}(k-1)N_{k-1}$  valószínűséggel növeli a  $k$  fokszámú csúcscok számát, tehát

$$N_k(N+1) = N_k(N) + \frac{k-1}{2N}N_{k-1}(N) - \frac{k}{2N}N_k(N) \quad , \quad k > 1 \quad (28)$$

$$N_1(N+1) = N_1(N) - \frac{1}{2N}N_1(N) + 1 \quad . \quad (29)$$

Ugyanez differenciális formában ( $N \gg 1$ )

$$\frac{dN_k}{dN} = \frac{(k-1)N_{k-1}}{2N} - \frac{kN_k}{2N} \quad , \quad k > 1 \quad (30)$$

$$\frac{dN_1}{dN} = -\frac{N_1}{2N} + 1 \quad . \quad (31)$$

A fenti egyenletek megoldásában követjük a véletlen rekurzív hálózat esetén használt stratégiát. A fokszámok összege a preferenciális hálózatban is ugyanaz (ugye világos, hogy a hálózat építése most is ugyanazokat az él és csúcs hozzáadásokat jelenti, mint a rekurzív esetben, csak a valószínűségek másak)  $\sum_{k=1}^{\infty} kN_k = 2N - 2$ , s ez az összeg kielégíthető volna, ha a fokszámok kielégítenék a  $N_k \sim N$  arányosságot. Ha ez így van, akkor nagy  $N$ -re  $P_k = N_k/N$  függetlenné válik  $N$ -től, s ezt felhasználhatjuk a master egyenlet megoldásában. Tehát a feltételezésünk az, hogy nagy  $N$ -re  $N_k = P_k N$ , ahol  $P_k$  már nem függ  $N$ -től. E feltételezést használva a (31) egyenletek rekurzióvá alakulnak

$$\frac{d(P_k N)}{dN} = P_k = \frac{k-1}{2}P_{k-1} - \frac{k}{2}P_k \quad , \quad (32)$$

$$\frac{d(P_1 N_1)}{dN} = P_1 = -\frac{1}{2}P_1 + 1 \quad . \quad (33)$$

A második egyenletből  $P_1 = 2/3$ , míg az első egyenlet a következő rekurziót adja

$$P_k = \frac{k-1}{k+2} P_{k-1} \quad . \quad (34)$$

A rekurziót visszavezetjük  $k = 1$ -ig, s felhasználjuk a  $P_1 = 2/3$  eredményt

$$P_k = \frac{k-1}{k+2} P_{k-1} = \frac{(k-1)(k-2)}{(k+2)(k+1)} P_{k-2} = \dots = \frac{(k-1)!}{(k+2)!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot P_1 = \frac{4}{(k+2)(k+1)k} \quad . \quad (35)$$

Ezzel megkaptuk a hálózatnövekedés egy jelentős modelljének megoldását, amely azt mutatja, hogy lineáris preferenciális csatlódási dinamika esetén a fokszámeloszlás hatvány alakú (skálainvariáns)

$$P_k \approx \frac{4}{k^3} \quad . \quad (36)$$

Ez a függvényalak részben egyezik azzal, amit különböző kapcsolati hálókból mérnek, bár a  $\gamma$  exponens a  $P_k \sim 1/k^\gamma$  összefüggésben általában különbözik a  $\gamma = 3$  értéktől.

A hatványszerű lecsengés összhangban van azzal a várakozásunkkal, hogy a preferenciális csatlódás olyan fokszámeloszlásra vezet, amelyben nagyszámú él is jelentős valószínűséggel van jelen.

A hálózatok világa nagyon jelentős és perspektivikus kutatási terület. Mi azonban itt befejezzük a témát, mivel számunkra a probléma elsősorban azért volt érdekes, mert egyrészt láttuk a master egyenletet alkalmazását egy élő, gyorsan fejlődő területen, másrészt a hálózati modellek vizsgálata elvezetett a master egyenlet megoldásának újabb módszereihez.