A Bose-Einstein kondenzációtól az atomlézerig

Szépfalusy Péter[1,3], **Csordás András**[2]
[1]*ELTE TTK, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék,*
[2]*MTA-ELTE Statisztikus Fizikai Kutatócsoport,*
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A,
[3]*MTA Szilártestfizikai és Optikai Kutatóintézet,*
1525, Budapest Pf. 49,
psz@galahad.elte.hu, csordas@power.szfki.kfki.hu

Kivonat

A Bose-Einstein (BE) kondenzáció témaköre történetének összefoglalásához csatlakozva, felsoroljuk azon kutatóhelyeket, ahol atomok gázában sikerült BE kondenzátumot létrehozni, majd a legelső berendezés és eljárás főbb jellemzőit ismertetjük. A elméleti kérdések tárgyalását a mágneses csapdába zárt ideálisnak tekintett gázzal kezdjük, ezt követi a kondenzátum dinamikájának vizsgálata zérus hőmérsékleten. Végül áttekintjük a BE kondenzált gázokkal végzett fontosabb kísérleteket és azok elméleti hátterét, külön kiemelve az atomlézer problémáját.

1 Történeti áttekintés[1]

1924-ben Bose egy új típusú statisztikát vezetett be fotonokra és annak segítségével származtatta Planck 1900-ban felállított formuláját az eloszlásfüggvényre. Bose statisztikáját Einstein általánosította tömeggel rendelkező részecskékre[2]. Einstein felismerte, hogy rögzített N részecskeszámú bozont tartalmazó rendszerben létezik egy T_c kritikus hőmérséklet, amely alatt a termodinamikai határesetben a részecskék véges N_0/N hányada foglalja el a legalacsonyabb energiájú állapotot. Einstein az ideális gázt vizsgálta és azt találta, hogy

$$N_0(T) = N_0(0)\left(1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right), \quad T \le T_c. \tag{1}$$

Nyitott kérdés maradt, hogy a jelenség hogy módosul a részecskék közötti kölcsönhatás következtében. London volt az első, aki egy kísérletileg megvalósított fázisátalakulásról, nevezetesen a hélium folyadékban szuperfolyékony állapotra vezető fázisátalakulásról, 1938-ban feltételezte, hogy Bose-Einstein típusú kondenzáció eredménye. Másrészt viszont a szuperfolyékony állapot tulajdonságainak Landau által kidolgozott fenomenológikus elmélete (1941), mely a jelenségek egész skálájáról számot tudott adni, nem támaszkodott ilyen feltevésre. Csak Bogoliubov 1947-ben közzétett ritka Bose-gázra alkalmazható elmélete nyitotta meg az utat a Bose-Einstein kondenzációt feltételező, az ötvenes évek végétől óriási fejlődést felmutató mikroszkópikus elmélet és a Landau-féle fenomenológikus elmélet összekapcsolása előtt [1]. Az is kiderült azonban, először O. Penrose és L. Onsager [2] számítása szerint (1956-ban), hogy a He atomok közötti viszonylag erős kölcsönhatás és a gázokéhoz képest a hélium-folyadék igen nagy sűrűsége miatt a Bose-Einstein kondenzátumban lévő részecskék száma még zérus hőmérsékleten is csak a teljes részecskeszám kevesebb, mint 10 %-át teszi ki. Problémát jelentett, hogy a kondenzátum létezésének meggyőző kísérleti kimutatása nagy akadályokba ütközött. Végül is a kondenzátum nagyságának közvetlen mérése csak 1998-ban Wyattnak sikerült [3], ami az említett elméleti értékkel jól egyező eredményre vezetett.

Olyan Bose-Einstein kondenzátum létrehozása, amely a rendszert alkotó atomok nagy részét tartalmazza sokáig reménytelen feladat maradt a várható rendkívül alacsony kritikus hőmérséklet miatt. A kritikus hőmérséklet megbecsléséhez használjuk fel a homogén, nem-kölcsönható gáz modelljét!

[1] Az áttekintés atomok Bose-Einstein kondenzációjára korlátozódik, és nem tér ki olyan fontos kapcsolatokra, mint a szupravezető állapot kialakulása vagy az excitonok gázában bekövetkező fázisátalakulás.

[2] Az ilyen statisztikát követő részecskéket később nevezték el bozonoknak, amelyekről kiderült, hogy spinjük $\hbar$ egész számú többszöröse lehet. E tekintetben nem követjük az időrendet és a következőkben használjuk a bozon elnevezést

Vezessük be a termikus de Broglie-hullámhosszt

$$\lambda_{dB} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ahol m az atom tömege. Jelöljük a részecskesűrűséget n-nel! A nem-kölcsönható modell szerint Bose-Einstein kondenzáció lép fel, ha λ_{dB} összemérhető az átlagos részecsketávolsággal, pontosabban:

$$n\lambda_{dB}^3 > 2.6g; \quad g = 2s+1,$$

s a részecske spinje, amiből T_c-re kapjuk, hogy

$$T_c = 0.53\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}\left(\frac{n}{g}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

A részecskék közötti átlagos távolságot 10^{-4} cm-re becsülve (ami a kölcsönhatás feltételezett kis befolyásával összhangban van, hiszen az 10^{-6} cm nagyságrendű hatótávolsággal rendelkezik) T_c-re μK-nél lényegesen alacsonyabb érték adódik. A T_c alatti jelenségek tanulmányozásához tehát igen alacsony hőmérsékletek elérése szükséges. Frontáttörést jelentett, hogy atomok gőzeit lézer segítségével μK hőmérséklet alá sikerült lehűteni a 80-as években. Ezirányú eredményeikért Steven Chu, Claude Cohen-Tanudji és Bill Phillips megkapta 1997-ben a Nodel-díjat. A hűtési folyamatot a mágneses csapdába zárt gáz párologtatásával tovább folytatva, 1995-ben létrehozták az első Bose-Einstein kondenzátumot. Ez az eredmény robbanásszerű fejlődést indított el, ami a jelenségben rejlő hatalmas alapkutatási és alkalmazási lehetőségekkel magyarázható.

2 Bose-Einstein kondenzáció létrehozása gázokban

Az első három sikeres kísérlet Eric Cornell csoportjában a JILA-ban (Joint Institute for Laboratory Astrophysics) [4] ^{87}Rb-mal, Randy Hulet csoportjában a Rice-Egyetemen (Houston, Texas) ^{7}Li-mal [5], illetve Wolfgang Ketterle csoportjában az MIT-n ^{23}Na-mal történt [6]. Azóta számos kutatóhelyen sikerült kondenzátum létrehozása (Rowland Institute ^{23}Na, Yale ^{87}Rb, Texas ^{87}Rb, Konstanz ^{87}Rb, München ^{87}Rb, NIST Gaithersburg ^{23}Na, Paris ^{87}Rb, Orsay ^{87}Rb, Hannover ^{87}Rb, Otago ^{87}Rb, Sussex ^{87}Rb). Újabb fejlemény, hogy 1998-ban Kleppneréknek az MIT-ban hidrogén gáz esetében sikerült kondenzátum kimutatása. Jelenleg intenzív kutatások folynak káliummal (Olaszország), a hélium triplett (metastabil) állapotával (Hollandia), illetve a nagy technikai nehézségek miatt mérsékeltebb intenzitással céziummal.

A kölcsönhatást az s-hullámú szórási hosszal jellemzhetjük az itt előforduló igen alacsony energiákon, és ennek előjelétől függően beszélünk taszító illetve vonzó kölcsönhatásról. A Rice-egyetemen végzett kísérlet érdekességét az adja, hogy a ^{7}Li atomok között a kölcsönhatás vonzó. Homogén rendszerben ilyenkor Bose-Einstein (BE) kondenzáció nem léphet fel, mert a kondenzátum mechanikailag instabil. Csapdában tartott atomok esetében azonban a kísérlet szerint lehetséges BE kondenzátumot létrehozni, de csak egy kritikus részecskeszám alatt ($N_0 \sim 1000$) a kondenzátumban. A továbbiakban azonban nem foglalkozunk a vonzó kölcsönhatás esetével.

Röviden ismertetjük a legelső kísérletben használt berendezés és eljárás jellemzőit. A [4] kísérletben lézerrel $\sim \mu$K-re lehűtött, magneto-optikai csapdába zárt ^{87}Rb atomok gázának hőmérsékletét párologtatásos hűtéssel tovább csökkentették. Ez a technika igen alkalmas alkáli atomok gázában, mivel azok jól hűthetők és befoghatók lézerrel, valamint alkáliakra a szórási hatáskeresztmetszet nagy, ami kedvező a párologtatásos hűtéshez.

^{87}Rb-ban egy elektron van a külső héjon így az atom teljes impulzusmomentumát az elektron $1/2$ spinje adja. A magspin $3/2$. Ennek megfelelően az atom teljes spinje $F = 2$ és $F = 1$ lehet. Az atom eredő $\vec{\mu}_m$ mágneses momentumát azonban lényegében az elektron mágneses momentuma határozza meg, ami ellentétes irányú az elektron spinjével. Mágneses térben az atomi szintek $2F + 1$ nívóra hasadnak fel (Zeeman-felhasadás). A [4] kísérletben két ú.n. anti-Helmholz tekerccsel kvadrupól mágneses teret hoztak létre az atomok befogására. Ez a tér a csapda közepétől távolodva növekszik. Ezért a mágneses csapdába befogható atomok azok, amelyek gyenge mágneses teret keresnek, azaz állapotaik $F = 2$, $m_F = 2, 1$, illetve $F = 1$, $m_F = -1$. A csapda közepén a potenciál viselkedése kedvezőtlen, mert ott nagy a spinátfordulás valószínűsége. Ezért transzverzálisan egy kicsiny, forgó mágneses teret szuperponáltak a kvadrupól térre, amelynek paramétereit úgy állították be, hogy az atomok mozgásuk során gyakorlatilag az időben kiátlagolt teret érezzék (TOP-trap: Time Orbiting Potential). Így sikerült a kvadrupól tér közepén lévő "lukat" betömni. A kísérletben az $F = 2$, $m_F = 2$ állapotot választották. A mágneses momentum mindenütt a mágneses tér irányába lett beállítva, így az atomok számára a csapda egy helytől függő potenciállal volt leírható. Ez a csapdapotenciál igen jó közelítéssel harmonikus potenciálnak vehető, nem csak ebben a kísérletben, hanem valamennyi kísérleti elrendezésnél. Az energiaviszonyok jellemzésére megjegyezzük, hogy az $F = 2$ és $F = 1$ hiperfinom nívók közti különbség GHz rendű, míg az alkalmazásra kerülő mágneses terekben a Zeeman-felhasadás nagyságrendje MHz.

3 Nem-kölcsönható bozonok harmonikus potenciálban

A mágneses csapdák közös jellemzője, hogy a potenciál igen jó közelítéssel

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_x^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2z^2. \tag{2}$$

A BE kondenzációra vezető fázisátalakulás természetének bemutatásához tekintsük el először az atomok közti kölcsönhatástól. A legegyszerűbb tárgyalást a nagykanonikus sokaság teszi lehetővé. Kritikus hőmérséklet felett a részecskék átlagos száma:

$$N = \sum_{n_x,n_y,n_z} \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_{n_xn_yn_z} - \mu)] - 1} \tag{3}$$

ahol a szokásos jelölést használtuk: β az inverz hőmérséklet és μ a kémiai potenciál. Az atomok energiaszintjei az (2) potenciálban:

$$\varepsilon_{n_xn_yn_z} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_z. \tag{4}$$

Látható, hogy $\varepsilon_{n_xn_yn_z} > \mu$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie ahhoz, hogy (3) értelmes legyen. Rögzített N mellett μ a hőmérséklettől függ, és a $0 \le T \le T_c$ hőmérséklet-tartományban $\mu \approx \mu_c = \hbar(\omega_x + \omega_y + \omega_z)/2$. Ekkor

$$N = N_0 + \sum_{n_x,n_y,n_z\neq 0} \frac{1}{\exp[\beta\hbar((\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)] - 1}. \tag{5}$$

alakot célszerű használni, ahol az alapállapotban lévő részecskék számát, N_0-t külön választottuk. Ezek alkotják a BE kondenzátumot. (5)-ben a diszkrét értékekre való összegzést integrállal közelítve T_c-re az $N_0 \to 0$, ha $T \to T_c - 0$ feltételből

$$k_BT_c^0 = \hbar\bar{\omega}(N/\zeta(3))^{1/3} \sim N^{1/3} \tag{6}$$

adódik ($\zeta(n)$ a Riemann-féle zéta függvény). Ugyanebben a közelítésben $T < T_c^0$-re a kondenzált részecskék száma

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^0}\right)^3 \tag{7}$$

szerint változik. A diszkrét esetben az átalakulás egy véges hőmérséklet-tartományban megy végbe, amely azonban nagy részecskeszám esetén olyan szűk, hogy célszerűen beszélhetünk a kritikus T_c hőmérsékletről.

Zérus hőmérsékleten $N_0 = N$, a rendszer alapállapotban van, aminek hullámfüggvénye: $\phi(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) = \prod_i \phi_0(\mathbf{r}_i)$, ahol

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{m\bar{\omega}}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)}, \quad \bar{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}. \tag{8}$$

Az alapállapoti sűrűség $n(\mathbf{r}) = N|\phi_0(\mathbf{r})|^2$, arányos N-nel, míg a kondenzátum mérete független N-től. A kísérletekben alkalmazott axiálszimmetrikus esetben ($\omega_x = \omega_y = \omega_\perp$) a két irányban a Gauss-függvény alakú kondenzátum kiterjedése a z és az arra merőleges irányban $d_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$, illetve $d_\perp = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp}$. Mint láttuk, véges hőmérsékleten csak a bozonok egy része van alapállapotban, a többi termikusan oszlik el a gerjesztett állapotok között. Ez a termikus felhő kiterjedtebb, mint az alapállapot. Közelítőleg Maxwell-Boltzmann eloszlást véve a felhő sűrűsége $\propto \exp[-V(\mathbf{r})/k_BT]$, amelynek átlagos szélessége $\sim \bar{d}\sqrt{k_BT/\hbar\bar{\omega}}$, ahol $\bar{d} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$.

A [4] és [6] kísérlet karakterisztikus adatai voltak:

	JILA TOP csapda [4](1995)	MIT "lóhere"-csapda [7](1996)
ω_z	$2\pi \times 208$ Hz	$2\pi \times 18$ Hz
$\omega_\perp$	$\omega_z/\sqrt{8}$	$2\pi \times 320$ Hz
$d_\perp$	1,25 μm	1,7 μm
d_z	0,74 μm	7,0 μm
T_c	170 nK	2 μK

4 A kölcsönhatás figyelembevétele

Az ideális gáz modell jó közelítést ad a T_c hőmérséklet közelében, mert ott kicsi a részecskesűrűség. Így (6) megfelelő pontosságú eredményt ad általában a kritikus hőmérsékletre. Sőt a kondenzált részecskék számát (7) a mérési pontosságon belül adta meg egészen az elért legalacsonyabb hőmérsékletekig. Más a helyzet azonban a kondenzátum kiterjedését és dinamikáját nézve, ezek tekintetében a kölcsönhatásnak meghatározó szerepe van. A következőkben a kondenzátum tulajdonságait vizsgáljuk zérus hőmérsékleten.

A kölcsönhatást is figyelembe véve a Hamilton-operátor

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i + V(\mathbf{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^{N} v(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \tag{9}$$

alakú. Az energia átlagértéke független részecske közelítésben a $\Psi(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^{N} \varphi(\mathbf{r}_i)$ hullámfüggvénnyel

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \hat{H}\Psi \rangle &= -N\frac{\hbar^2}{2m} \int d^3r \, \varphi^*(\mathbf{r}) \Delta \varphi(\mathbf{r}) + N \int d^3r \, \varphi^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) + \\ &+ \frac{N(N-1)}{2} \int d^3r \, d^3r' \, \varphi^*(\mathbf{r}) \varphi^*(\mathbf{r}') v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}'). \end{aligned} \tag{10}$$

A $\varphi(\mathbf{r})$ egyrészecske hullámfüggvényeket a

$$\delta \left[\langle \Psi, \hat{H}\Psi \rangle - E \langle \Psi, \Psi \rangle \right] = 0 \tag{11}$$

variációs elvből határozhatjuk meg, ahol E a Ψ normálsága miatt fellépő Lagrange-multiplikátor. A számítás eredménye: Bevezetve $\mu = E/N$-t, $\Psi_0(\mathbf{r}) = N^{1/2} \varphi(\mathbf{r})$-t,

$$\int d^3r \, |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 = N, \tag{12}$$

Ψ_0-ra kapjuk, hogy

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \Psi_0(\mathbf{r}) + \left(1 - \frac{1}{N} \right) \int d^3r' \, v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\Psi_0(\mathbf{r}')|^2 \Psi_0(\mathbf{r}) = \mu \Psi_0(\mathbf{r}). \tag{13}$$

Nagy részecskeszám esetén az $1/N$-es tag elhanyagolható.

A kísérletben, illetve a későbbi kísérletekben a kondenzátum legsűrűbb részén is az átlagos részecsketávolság nagyságrendekkel nagyobb volt, mint a tipikus atomi-kétrészecske kölcsönhatások karakterisztikus hatótávolsága. Minthogy az ütköző atomok energiája igen kicsi, a $v(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ kölcsönhatást a

$$v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = v\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{14}$$

kontakt-potenciállal helyettesíthetjük, ahol

$$v = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \tag{15}$$

a pedig az s-hullám szórási hossz.

A fentiek figyelembevételével (13)-ból kapjuk a Gross-Pitaevskii egyenletet:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) + v|\Psi_0(\mathbf{r})|^2 \right\} \Psi_0(\mathbf{r}) = \mu \Psi_0(\mathbf{r}); \quad n_0(\mathbf{r}) = |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 \tag{16}$$

Ez egy nemlineáris Schrödinger-egyenlet Ψ_0-ra, és a μ kémiai potenciálra a (12) normálás mellett. Ψ_0-t szokás a kondenzátum hullámfüggvényének tekinteni.

A ritka gáz közelítés jóságát kontrolláló dimenziótlan paraméter az na^3, ú.n. gázparaméter, ahol n a gáz átlagos sűrűsége. Ez a kísérletekben mindig kisebb mint 10^{-3}. Ez nem jelenti azt, hogy a kölcsönhatás elhanyagolható. Megbecsülhető, hogy

$$\frac{E_{int}}{E_{kin}} \propto \frac{N|a|}{\bar{d}} \equiv \eta. \tag{17}$$

Ha N elegendően nagy $\eta \gg 1$ lehet akkor is ha $a/\bar{d}$ kicsi. A JILA-kísérletben $\eta > 10$, az MTI kísérletben pedig $10^3 - 10^4$. Nagy kondenzátum esetén az ú.n Thomas-Fermi közelítés alkalmazható, ami a kinetikus energia operátorának elhanyagolását jelenti a Gross-Pitaevskii egyenletben. Ekkor Ψ_0-ra algebrai egyenlet adódik:

$$n_0(\mathbf{r}) \equiv |\Psi_0(\mathbf{r})| = \frac{1}{v} [\mu - V(\mathbf{r})] \Theta(\mu - V(\mathbf{r})), \tag{18}$$

ahol a Θ függvény biztosítja, hogy $n_0 \geq 0$.

A [4] és [6] kísérletekben:

	JILA TOP-csapda [4](1995)	MIT "lóhere"-csapda [7](1996)
N_0 (max)	2000 ^{87}Rb	$5 \cdot 10^6$ ^{23}Na
a	10 nm	4,9 nm
kiterjedés z-irányban	1,44 μm	300 μm
kiterjedés $\perp$-irányban	4,05 μm	17 μm
$n_0(0)$		$3 \cdot 10^{14}$ cm^{-3}

Látjuk, hogy a kondenzátum kiterjedése lényegesen nagyobb lehet, mint az oszcillátor-alapállapoté. Vagyis a kölcsönhatás, bármilyen gyenge is az, a kondenzátum számára meghatározó.

Az ebben a fejezetben alkalmazott közelítés azt is feltételezte, hogy valamennyi részecske a kondezátumban van. Kölcsönható részecskék rendszerében ez természetesen egzaktúl nem teljesülhet. A pontosabb számítás szerint azonban az itt tárgyalt rendszerek esetében a kondenzátumon kívüli részecskék száma alapállapotban nem haladja meg az 1-2 %-ot.

Más típusú korrekciót jelentenek a kondenzátumban jelenlevő kvantumfluktuációk. Ezek azt eredményezik, hogy a kondenzátum amplitútó "squeezed" állapotban van, vagyis nagyok Ψ_0 fázisának fluktuációi. Ez az itt tárgyalt kérdéseknél nem jelent problémát.

5 Kvantum hidrodinamika[3]

A kondenzátum alacsonyenergiás gerjesztéseire Stringari [8] származtatta a hidrodinamikai hullámegyenletet a következő meggondolásokkal. Induljunk ki a (16) Gross-Pitaevskii egyenlet általánosításából

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_0(\mathbf{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}) + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}|\Psi_0(\mathbf{r},t)|^2\right]\Psi_0(\mathbf{r},t), \qquad (19)$$

amely a $\delta S = 0$,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \langle\Psi(t)|i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}|\Psi(t)\rangle, \quad \delta\Psi(t_1) = \delta\Psi(t_2) = 0 \qquad (20)$$

[3]Zérus hőmérsékleten hidrodinamikáról akkor beszélhetünk, ha a gerjesztések karakterisztikus hossza sokkal nagyobb, mint az átlagos részecsketávolság.

variációs elvből kapható és a kondenzátum hullámfüggvényének időbeli változását írja le. Ebből a kondenzátum $n_0(\mathbf{r},t) = |\Psi_0(\mathbf{r},t)|^2$ sűrűségére, illetve a $\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = (\Psi_0^*\nabla\Psi_0 - \Psi_0\nabla\Psi_0^*)/2imn_0(\mathbf{r},t)$ sebességterére a következő mozgásegyenleteket kapjuk:

$$\frac{\partial}{\partial t}n_0 + \nabla(\mathbf{v}n_0) = 0, \qquad (21)$$

(kontinuitási egyenlet), illetve

$$m\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \nabla\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}) + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}n_0 - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n_0}}\Delta\sqrt{n_0}\right) = 0. \qquad (22)$$

Az egyensúlyi esetben $\mathbf{v} = 0$, $n_0(\mathbf{r},t) = n_0(\mathbf{r})$. Vegyük $n_0(\mathbf{r})$-t a (18) Thomas-Fermi közelítésben, azaz nagy kondenzátumot tételezünk fel, és (22)-ben hanyagoljuk el az utolsó, "kvantumnyomás" tagot. Az $n_0(\mathbf{r})$ és $\mathbf{v} = 0$ körül linearizált (21) és (22) egyenletekből, ha $\delta\mathbf{v}$-t elimináljuk, egy hullámegyenletet kapunk a $\delta n(\mathbf{r},t)$-ra. Ennek megoldását $\delta n(\mathbf{r},t) = e^{\pm i\omega t}\delta n(\mathbf{r})$ alakban keresve az ω frekvenciájú módusra a következő sajátérték egyenletet kapjuk:

$$\hbar^2\omega^2\delta n = \hat{H}_{hyd}^2\delta n, \quad \hat{H}_{hyd}^2 = -\frac{\hbar^2}{m}\nabla(\mu - V(\mathbf{r}))\Theta(\mu - V(\mathbf{r}))\nabla, \qquad (23)$$

(18), (23) egyenletek megoldása homogén rendszerben ($V(\mathbf{r}) = 0$) $\omega = ck$, $c = \sqrt{n_0 v/m}$, a Bogoliubov által talált fonon-spektrum. Érvényességi feltétele $k < \sqrt{8\pi na}$. Nagyobb k értékekre az elhanyagolt kvantumnyomás tag járuléka lényegessé válik. Általában is igaz, hogy (23) az alacsony energiájú gerjesztéseket írja le helyesen.

Vizsgáljuk a következőkben a háromdimenziós harmonikus oszcillátor csapdapotenciál esetét! Izotróp esetben ($\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega_0$) L^2 és L_z kommutál $\hat{H}_{hyd}^2$-val, ezért l és m jó kvantumszámok, és mint gömbszimmetrikus problémák esetén a gerjesztési spektrum nem függ m-től. Stringari a következő diszperziós összefüggést találta:

$$\omega^2(n,l) = \omega_0^2(2n^2 + 2nl + 3n + l), \quad n, l = 0, 1, \ldots, \qquad (24)$$

ahol n a gerjesztések radiális kvantumszáma.

Az axiál-szimmetrikus esetben Stringari [8] megadta néhány módus frekvenciáját. Az általános megoldás [9, 10]-ben történt. A [9] cikkben a szerzők kimutatták, hogy a (23) hidrodinamikai egyenlet forgásszimmetrikus elliptikus koordinátákban teljesen szeparálható. A kísérletekben alkalmazott, csak a z-tengely körüli forgásszimetrikus csapdapotenciál ($\omega_x = \omega_y = \omega_\perp$) esetén L_z kommutál $\hat{H}^2_{hyd}$-val, tehát $\hat{H}^2_{hyd}$ mellett megmaradó mennyiség operátora. Létezik azonban egy harmadik, velük kommutáló operátor:

$$\hat{B} = -\frac{m\omega_\perp^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - -\frac{m\omega_z^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mathbf{r}\nabla(\mathbf{r}\nabla + 3), \qquad (25)$$

aminek spektruma $(n + |m|)(n + |m| + 3)$, ahol $n = 0, 1, \ldots$. Rögzített n, m mellett a gerjesztések egy további, egész értéket felvevő j kvanszummámmal jellemezhetők, ami a $j = 0, 1, \ldots, [n/2]$ értékekeket veheti fel. Az első néhány hidrodinamikai kvázirészecske gerjesztés $\omega(n, j, m)$ frekvenciája:

$$\begin{aligned}
\omega^2(0,0,m) = &\quad \omega_z^2|m|\lambda \\
\omega^2(1,0,m) = &\quad \omega_z^2(1 + |m|\lambda) \\
\omega^2(2,j,m) = &\quad \omega_z^2\Big(\frac{3}{2} + 2(|m|+1)\lambda \pm \\
&\quad \pm\frac{1}{2}(9 - 4(|m|+4)\lambda + 4(|m|+2)^2\lambda^2)\Big)^{1/2} \\
\omega^2(3,j,m) = &\quad \omega_z^2\Big(\frac{7}{2} + 2(|m|+1)\lambda \pm \\
&\quad \pm\frac{1}{2}(25 + 4(|m|-4)\lambda + 4(|m|+2)^2\lambda^2)\Big)^{1/2}, \qquad (26)
\end{aligned}$$

ahol $\lambda = (\omega_\perp/\omega_z)^2$.

Megjegyezzük, hogy teljesen anizotróp harmonikus oszcillátor csapdapotenciál esetén ($\omega_x \neq \omega_y \neq \omega_z$) már $\hat{L}_z$ sem megmaradó mennyiség operátora. Azonban a hidrodinamikai-egyenlet általános elliptikus koordinátákban szeparálható marad [11]. Megtalálhatók azon egymással kommutáló operátorok, amelyek sajátértékei a szeparációs konstansok. Ezek közül egyik $\hat{H}^2_{hyd}$, egy másik a fenti $\hat{B}$ triviális módosításával kapható. Létezik továbbá egy kvadratikus deriváltakat tartalmazó harmadik operátor, amely ennek az általános esetnek egy szimmetriaoperátora. Ennek az esetnek is van kísérleti relevanciája. A NIST-ben (National Institute of Standard, Gaithersburg) olyan harmonikus oszcillátor csapdapotenciált használtak a nátrium atomokból álló kondenzátum összetartására, amely teljesen anizotróp volt.

A módusok meghatározására magasabb energiákon a függelékben ismertetett Bogoliubov-egyenletek szolgálnak. A mérési eredményekkel való összehasonlításról a következő fejezetekben lesz szó.

6 Főbb kísérleti eredmények a Bose-Einstein kondenzált gázokkal és elméleti hátterük (1995-1999)

Bevezetésként megjegyezzük, hogy tekintettel az óriási ütemű fejlődésre az irodalomjegyzék távolról sem lehet teljes. További referenciák számára három összefoglaló cikkre utalunk: [12, 13, 14]

1. Kondenzált részecskék száma:
   - a, Kísérlet: [15];
   - b, Elmélet: [16], [17];
2. Elemi gerjesztések energiája és csillapodása:
   - a, Kísérlet: [18], [19], [20], [21], [22];
   - b, Elmélet:
     I. Energia: [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37];
     II. Csillapodás: [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [45];
3. Két komponensű kondenzátum:
   - a, Kísérlet: [46], [47], [48], [49];
   - b, Elmélet: [50], [51], [52], [53];
4. Kondenzátumok interferenciája:
   - a, Kísérlet: [54];
   - b, Elmélet: [55], [56], [57];
5. Optikai csapda:
   - a, Kísérlet: [58], [59], [60];
   - b, Elmélet: [61];
6. A kondenzátum kialakulásának dinamikája:
   - a, Kísérlet: [62];

b, Elmélet: [63], [64], [65], [66];

7. Feshbach rezonancia:

   a, Kísérlet: [67], [68];

   b, Elmélet: [69], [70], [71], [72], [73];

8. Elméleti munkák, amelyek kísérleti vizsgálatot motiválhatnak:

   a, Hidrodinamikai módusok ($T > 0$): [74], [75] (és hivatkozások ezekben);

   b, rugalmatlan fényszórás: [76], [77], [35];

7 Atomlézer

Az előző fejezetben szerepelt több téma is szoros kapcsolatban van az atomlézer problémájával (például kondenzátumok interferenciája; kondenzátum kialakulása, tekintettel az ott meghatározó szerepet játszó Bose-faktorra), azokat ide is lehetne sorolni.

a, Kísérlet: [78], [79];

b, Elmélet: [12], [80] (és hivatkozások ezekben).

Köszönetnyilvánítás

Az ilyen témájú hazai kutatásokat az FKFP0159/1997, az OTKA T017493, T029552, F020094 pályázatok és az MTA-DFG 95. számú projektje részben támogatták.

Függelék: Mikroszkópikus elmélet (Bogoliubov-egyenletek)

A csapda potenciál explicit térfüggése miatt a homogén rendszerben impulzus-térben származtatott Bogoliubov-egyenleteket most valós térben kell felírni. Az (9)-nak megfelelő másodkvantált Hamilton-operátor:

$$\begin{aligned}\hat{H} \;=\; & -\int \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r})\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\hat{\Psi}(\mathbf{r})\,d^3r + \int \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r})V(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r})\,d^3r + \\ & +\frac{1}{2}\int \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r})\hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r}')v(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\Psi}(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}')\,d^3r\,d^3r', \qquad (27)\end{aligned}$$

ahol $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ Bose-típusú téroperátor a szokásos kommutátorral:

$$\left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r}')\right] = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad (28)$$

A téroperátor mozgásegyenlete:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}(\mathbf{r},t) = \left[\hat{\Psi}(\mathbf{r},t), \hat{H} - \mu\hat{N}\right], \qquad (29)$$

ahol $\hat{N}$ a részecskeszám operátora:

$$\hat{N} = \int \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r},t)\hat{\Psi}(\mathbf{r},t)\,d^3r, \qquad (30)$$

μ pedig a kémiai potenciál. A Bose-kondenzáció kritikus hőmérséklete alatt (így zérus hőmérsékleten is) a téroperátor várható értéke zérustól különböző, amit a téroperátorban egy C-számfüggvénnyel érdemes leválasztani:

$$\hat{\Psi} = \Psi_0 + \hat{\Phi}. \qquad (31)$$

Ψ_0 a kondenzátum hullámfüggvénye, ami a kondenzátumban lévő részecskék N_0 számára normált:

$$\int |\Psi_0|^2\,d^3r = N_0 \qquad (32)$$

A kondenzátum feletti részecskéket leíró $\hat{\Phi}$ operátor szintén a szokásos Bose-kommututációs szabályokat követi:

$$\left[\hat{\Phi}(\mathbf{r}), \hat{\Phi}^{+}(\mathbf{r}')\right] = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad (33)$$

A továbbiakban a kétrészecske potenciált $v(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = v\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$-nak vesszük ($v = 4\pi\hbar^2 a/m$).

Bogolibov-közelítésben a (29) egyenletbe helyettesítjük a (31) felbontást és $\hat{\Phi}$-ben másod és harmadfokú tagokat elhanyagoljuk. A $\hat{\Phi}$-től nem függő tagok adják a a korábban már (16)-ban felírt Gross-Pitaevskii-egyenletet. A (29) téroperátor-mozgásegyenletben a $\hat{\Phi}$-ben elsőrendű tagok a

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r}) - \mu + 2|K(\mathbf{r})|\right)\hat{\Phi} + K\hat{\Phi}^+ \tag{34}$$

mozgásegyenletet adják, ahol

$$K(\mathbf{r}) \equiv \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\Psi_0^2(\mathbf{r}). \tag{35}$$

Ez az egyenlet a

$$\hat{\Phi} = \sum_{j\neq 0}\left(u_j(\mathbf{r})\hat{\alpha}_j e^{-i\omega_j t} - v_j^*(\mathbf{r})\hat{\alpha}_j^+ e^{i\omega_j t}\right) \tag{36}$$

transzformációval szétesik módusokra, ahol $\hbar\omega_j = E_j$ a módusok energiája, $\hat{\alpha}_j$-k Bose-kommutációs szabályok szerinti (tértől és időtől már nem függő) eltüntető operátorok.

Ez természetesen csak akkor igaz, ha az $u_j(\mathbf{r})$ $v_j(\mathbf{r})$ függvények nem tetszőlegesek, hanem ha kielégítik a valós térben felírt

$$\begin{pmatrix} \hat{H}_{HF} & -K \\ -K^* & \hat{H}_{HF} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} = E_j \begin{pmatrix} u_j \\ -v_j \end{pmatrix} \tag{37}$$

kétkomponensű Bogoliubov-egyenleteket a

$$\begin{aligned} \int d^3r\ (u_j u_i^* - v_j v_i^*) &= \delta_{ij} \\ \int d^3r\ (u_j v_i^* - v_j u_i^*) &= 0 \end{aligned}$$

normálás mellett. A $\hat{H}_{HF}$-operátor:

$$\hat{H}_{HF} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r}) + 2|K(\mathbf{r})| - \mu. \tag{38}$$

Az $\hat{\alpha}_j^+$ operátorok az E_j energiájú, kondenzátum feletti kvázirészecske állapotoknak a keltő operátorai. A $j = 0$ esetben a diagonalizálás nem végezhető el a (36) transzformációval. Ez a járulék a kondenzátum fázisának diffúziójára vezet, ami ebben a közelítésben az elemi gerjesztések spektrumától független [81, 82].

Bogoliubov közelítésben először meg kell oldani a Gross-Pitaevskii egyenletet Ψ_0-ra. Ezt a Bogoliubov-egyenletekbe írva a következő lépés, hogy alkalmasan választott bázison a (37) egyenleteket diagonalizáljuk. A sajátértékek adják a kvázirészecske energiákat, a sajátvektorokból pedig kiszámítjuk az u_j és v_j függvényeket. Véges hőmérsékleten a probléma még lényegesen bonyolultabbá válik, mert a Gross-Pitaevskii egyenletben és a Bogoliubov-egyenletekben is megjelenik a termikusan gerjesztett részecskék sűrűsége. Az irodalomban számos módszert dolgoztak ki a numerikus probléma kezelésére [23, 30, 36].

Hivatkozások

[1] A. Griffin, *Excitations in a Bose-Condensed Liquid* (Cambridge University Press, Cambridge 1993).

[2] O. Penrose, L. Onsager, Phys. Rev. **104**, 576 (1956).

[3] Adrian F. G. Wyatt, Nature **391**, 56 (1998).

[4] M . H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wiemann, E. A. Cornell, Science **269**, 198 (1995).

[5] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett, and R.G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).

[6] K.B. Davis, M.O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.D. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).

[7] M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **77**, 416 (1996).

[8] S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **77**, 2360 (1996).

[9] M. Fliesser, A. Csordás, P. Szépfalusy, R. Graham, Phys. Rev. A**56**, R2533 (1997).

[10] P. Öhberg, E. L. Surkov, I. Tittonen, S. Stenholm M. Wilkens, G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A**56**, R3346 (1997).

[11] A Csordás, R. Graham, Phys. Rev. A**59**, 1477 (1999).

[12] A. S. Parkins, D. F. Walls, Physics Reports, **303**, 1 (1998).

[13] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, `cond-mat/9806038`.

[14] E. A. Cornell, J. R. Ensher, C. E. Wieman, `cond-mat/9903109`.

[15] J. R. Ensher, D. S. Jin, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **77**, 4984 (1996).

[16] C. Herzog, M. Olshanii, Phys. Rev. A**55**, 3254 (1997).

[17] A. Minguzzi, S. Conti, M. P. Tosi, J. Phys. **C9**, L33 (1997).

[18] D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **77**, 420 (1996).

[19] M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **77**, 988 (1997).

[20] D. S. Jin, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **78**, 764 (1997).

[21] M. R. Andrews, D. M. Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **79**, 553 (1997).

[22] D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, S. Inouye, M. R. Andrews, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **81**, 500 (1998).

[23] M. Edwards, P. A. Ruprecht, K. Burnett, R. J. Dodd, C. W. Clark, Phys. Rev. Lett. **77**, 1671 (1996).

[24] P. A. Ruprecht, M. Edwards, K. Burnett, C. W. Clark, Phys. Rev. A**54**, 4178 (1996).

[25] K. G. Singh, D. S. Rokshar, Phys. Rev. Lett. **77**, 1667 (1996).

[26] L. You, W. Hoston, M. Lewenstein, Phys. Rev. A**55**, R1581 (1997).

[27] A. Smerzi, S. Fantoni, Phys. Rev. Lett. **78**, 3589 (1997).

[28] F. Dalfovo, S. Giorgini, M. Guilleumas, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, Phys. Rev. A**56**, 3840 (1997).

[29] B. D. Esry, Phys. Rev. A**55**, 1147 (1997).

[30] D. A. W. Hutchinson, E. Zaremba, A. Griffin, Phys. Rev. Lett. **78**, 1842 (1996).

[31] J. F. Dobson, Phys. Rev. Lett. **73**, 2244 (1994).

[32] A. L. Fetter, D. Rokshar, Phys. Rev. A**57**, 1191 (1998).

[33] M. Fliesser, A. Csordás, R. Graham, P. Szépfalusy, Phys. Rev. A**56**, 4879 (1997).

[34] A. Csordás, R. Graham, P. Szépfalusy, Phys. Rev. A**56**. 5179 (1997).

[35] A. Csordás, R. Graham, P. Szépfalusy, Phys. Rev. A**57**, 4669 (1998).

[36] J. Reidl, A. Csordás, R. Graham, P.Szépfalusy, megjelenés alatt, Phys. Rev. A**59**, (1999) és `cond-mat/9811012`.

[37] M. J. Bijslma, H. T. C. Stoof, `cond-mat/9902065`.

[38] P. Szépfalusy, I. Kondor, Ann. Phys. (N.Y.) **82** 1 (1974).

[39] W. V. Liu, Phys. Rev. Lett. **79**, 4056 (1997).

[40] L. P. Pitaevskii, S. Stringari, Phys. Lett. **A235**, 398 (1997).

[41] H. Shi, A. Griffin, Physics Reports **304**, 1 (1998).

[42] S. Giorgini, Phys. Rev. A**57**, 2949 (1998).

[43] P. O. Fedichev, G. V. Slyapnikov, J. T. M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **80**, 2269 (1998).

[44] Gy. Bene, P. Szépfalusy, Phys. Rev. A**58**, R3391 (1998).

[45] S. Choi, S. A. Morgan, K. Burnett, Phys. Rev. A**57**, 4057 (1998).

[46] C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell, C. E. Wiemann, Phys. Rev. Lett. **78**, 586 (1997).

[47] D. S. Hall, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **81**, 1539 (1998).

[48] D. S. Hall, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **81**, 1543 (1998).

[49] J. Williams, R. Walser, J. Cooper, E. Cornell, M. Holland, `cond-mat/9806337`.

[50] H. Pu, N. P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **80**, 1130 (1999).

[51] H. Pu, N. P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **80**, 1134 (1999).

[52] J. I. Cirac, M. Lewenstein, K. Mølmer, P. Zoller, Phys. Rev. A**57**, 1208 (1998).

[53] B. D. Esry, C. H. Greene, J. P.Burke Jr., J. L. Bohn, Phys. Rev. Lett. **78**, 3594 (1997).

[54] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, Science **275**, 637 (1997).

[55] M. Naraschewski, A. Schenzle, H. Wallis, Phys. Rev. A**56**, 603 (1997).

[56] H. Steck, M. Naraschewski, H. Wallis, Phys. Rev. Lett. **80**, 1 (1998).

[57] M. Naraschewski, R. J. Glauber, `cond-mat/9806362`.

[58] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **80**, 2027 (1998).

[59] J. Stenger, S. Inouye, D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, W. Ketterle, `cond-mat/9901072`.

[60] D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, W. Ketterle, `cond-mat/9902301`.

[61] Tin-Lun Ho, Phys. Rev. Lett. **81**, 742 (1998).

[62] H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, D. S. Durfee, S. Inouye, W. Ketterle, Science **279**, 1005 (1998).

[63] Yu. Kagan, E. L. Surkov, G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A**55**, R18 (1997).

[64] H. T. C. Stoof, Phys. Rev. Lett. **78**, 768 (1997).

[65] C. W. Gardiner, P. Zoller, R. J. Ballagh, M. J. Davis, Phys. Rev. Lett. **79**, 1793 (1997).

[66] C. W. Gardiner, M. D. Lee, R. J. Ballagh, M. J. Davis, P. Zoller, `cond-mat/9801027`.

[67] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, W. Ketterle, Nature **392**, 151 (1998).

[68] J. Sterger, S. Inouye, M. R. Andrews, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, W. Ketterle, `cond-mat/9901056`.

[69] K. Burnett, Nature **392**, 125 (1998).

[70] A. J. Moerdijk, B. J. Verhaar, A. Axelson, Phys. Rev. A**51**, 4852 (1995).

[71] H. M. J. M. Boesten, J. M. Vogels, J. G. C. Templaars, B. J. Verhaar, Phys. Rev. A**54**, R3726 (1996).

[72] J. M. Vogels, C. C. Tsai, R. S. Freeland, S. J. J. M. F. Kokkelmans, B. J. Verhaar, D. J. Heinzen, Phys. Rev. A**56**, 1067 (1997).

[73] E. Timmermans, P. Tommasini, R. Côté, M. Hussein, A. Kerman, `cond-mat/9805323`.

[74] Milena Imamović-Tomasović, A. Griffin, `cond-mat/9812281`.

[75] E. Zaremba, T. Nikuni, A. Griffin, `cond-mat/9903029`.

[76] A. Csordás, R. Graham, P. Szépfalusy, Phys. Rev. A**54**, R2543 (1996).

[77] E. Timmermans, P. Tomassini, `cond-mat/9707319`.

[78] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **78**, 582 (1997).

[79] I. Bloch, Th. W. Hänsch, T. Esslinger, `cond-mat/9812258`.

[80] R. Graham, D. F. Walls, cond-mat/9902153.

[81] M. Lewenstein, L. You, Phys. Rev. Lett. **77**,3489 (1996).

[82] A. I. Imamoglu, M. Lewenstein, L. You, Phys. Rev. Lett. **78**, 2511 (1997).